MODELOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

APLICADOS EN CIENCIAS AGROPECUARIAS

Jhonny Alban A. ◆ Joffre Pineda P.
David Jiménez O. ◆ Yovany Cañar C.
Diego Quezada Y.

EDITORIAL SAGA

Jhonny Alban A. ♦ Joffre Pineda P.
David Jiménez O. ♦ Yovany Cañar C.
Diego Quezada Y.

MODELOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

APLICADOS EN CIENCIAS AGROPECUARIAS

EDITORIAL
SAGA

MODELOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL
Aplicados en Ciencias Agropecuarias
Segunda edición, 2024
Albán Alcívar, Jhonny Alfredo
Pineda Procel, Joffre Hernán
Jiménez Ordoñez, Hernán David
Cañar Cuenca, José Yovany
Quezada Yaguachi, Diego Andrés
© Derechos reservados conforme a la ley

EDITORIAL SAGA
10 de agosto 232 entre Almendros y Mangos
Website: https://libros.editorialsaga.com
Email: editorialsaga.ec@gmail.com
Telf. (+593) 96 267 9148
Machala, Ecuador

Dirección y supervisión editorial:
MSc. William Satama Pereira

ISBN: 978-9942-7351-0-2

Impreso y hecho en Ecuador
Printed and made in Ecuador

Autores

JHONNY ALFREDO ALBAN ALCIVAR[1]

- Docente del Bachillerato Internacional de la UEPRIM.
- Docente Universidad Técnica de Machala (UTMACH, 2008 - 2017)
- Magister en Docencia de las Matemáticas - Universidad de Cuenca.
- Especialización en Docencia Matemática - Centro de Altos Estudios (OEI)
- Diploma Superior en Docencia Universitaria (UTMACH)
- Ingeniero Civil - Universidad Técnica de Machala (UTMACH)

https://orcid.org/0000-0001-5264-4906

JOFFRE HERNAN PINEDA PROCEL[1]

- Docente del Programa del Continuo del Bachillerato Internacional de la UEPRIM.
- Máster Universitario en Didáctica de las Matemáticas en Educación Infantil y Primaria. UNIR – España.
- Profesor de Educación Media, Especialización Informática. UTMACH – Machala.
- Analista de Sistemas. 2003. UTMACH – Machala

https://orcid.org/0009-0003-3447-3287

HERNAN DAVID JIMENEZ ORDOÑEZ[1]

- Docente del Bachillerato Internacional de la UEPRIM.
- Docente Preuniversitario de la Universidad Técnica de Machala
- Docente del Instituto Tecnológico Superior "Ismael Pérez Pazmiño"
- Magister en Asesoría y Auditoría Educativa - Universidad de Especialidades Espíritu Santo (UEES)
- Licenciado en Ciencias de la Educación mención Físico – Matemático – Universidad Técnica Particular de Loja (UTPL)
- Ingeniero Químico - Universidad Técnica de Machala (UTMACH)
- Tecnólogo en Alimentos - Universidad Técnica de Machala (UTMACH)
- Diplomado Superior Herramientas Tecnológicas de Innovación
- Docente y Competencias Digitales (UTPL)

https://orcid.org/0009-0008-6367-6987

JOSE YOVANY CAÑAR CUENCA[1]

- Docente del Programa del Continuo del Bachillerato Internacional de la UEPRIM.
- Magister en Educación mención en Innovación y Liderazgo Educativo – 2022. UTPL
- Licenciado en Ciencias de la Educación en la especialidad de Físico – Matemáticas. 2012. UNL

https://orcid.org/0009-0008-6801-1327

DIEGO ANDRES QUEZADA YAGUACHI[1]

- Docente del Programa del Continuo del Bachillerato Internacional de la UEPRIM.
- Magister en Educación mención en enseñanza de la matemática – 2024. UTPL
- Licenciado en Ciencias de la Educación en mención Físico Matemáticas – 2023. UTPL

https://orcid.org/0009-0008-6016-3182

-

[1] Unidad Educativa Particular Bilingüe Principito & Marcel Laniado de Wind

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN 9

UNIDAD I. ANÁLISIS CUANTITATIVO Y CONSTRUCCIÓN DE MODELOS 13

Historia de la Investigación de Operaciones 13

Características de la Investigación de Operaciones 14

Definición 16

Metodología de la Investigación de Operaciones 16

Estructura de los modelos empleados en la Investigación de Operaciones. 18

Concepto de optimización. 19

Áreas de aplicación de la Investigación de Operaciones. 20

Técnicas de la Investigación de Operaciones. 21

UNIDAD II. MODELOS DE PROGRAMACION LINEAL 25

Modelo de Programación Lineal 27

Forma Estándar del modelo de PL 28

Formulación de modelos de Programación Lineal 29

Consejos para formular modelos de programación lineal 31

Problemas de Modelación 32

Planeación de la producción agrícola 32

Planeación de la producción agropecuaria. 46

Diseño de mezclas, dietas y alimentos. 49

Manejo Forestal 58

Planeación de la fuerza de trabajo 63

Inversión 66

Otras aplicaciones 71

UNIDAD III. SOLUCIÓN GRAFICA DE MODELOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL 77

Método Grafico 77

Resolución grafica mediante software GeoGebra 93

Análisis de Sensibilidad. 111

Análisis de sensibilidad para los coeficientes de la función objetivo 112

Intervalo de Optimalidad 112

Intervalo de factibilidad del lado derecho de una restricción .. 116

Precio Sombra 132

Análisis de sensibilidad haciendo uso GeoGebra 141

Determinación de intervalo de optimalidad 147

Cambios en los valores del lado derecho de las restricciones . 147

UNIDAD IV. SOLUCION ANALITICA DE MODELOS DE PROGRAMACION LINEAL 153

Método Simplex 153

Requerimientos del método simplex 153

Algoritmo del método simplex 153

Solución analítica mediante Solver de Excel 169

Herramienta Solver 169

Solver y Programación Lineal 169

Informes de Respuestas, sensibilidad y límites de Solver 174

Informe de Respuestas 175

Informe de Sensibilidad 176

Informe de Límites 178
Problemas de aplicación, mediante el programa Solver 179
Problemas de Análisis de sensibilidad con Solver 191
Análisis de Sensibilidad 208
UNIDAD V. OTROS PROYECTOS DE APLICACIÓN AGROPECUARIOS 211
Suplemento alimenticio 211
Balanceado para pollos 216
Modelación de la dieta balanceada con Solver 218
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 225

INTRODUCCIÓN

En la actualidad a nivel mundial se ha incrementado la necesidad de introducir en las investigaciones los modelos y las herramientas matemáticas de avanzada (Rodríguez, 2001). El uso e interpretación adecuada de estas técnicas permiten la toma de decisiones óptimas, la eficiencia y el logro de desempeños superiores en las diferentes esferas y muy en especial en el sector agrario, cuya aplicación favorece el desarrollo de los sistemas productivos (Rodríguez y Bermúdez, 1995).

En el ambiente socioeconómico actual altamente competitivo y complejo, exigen una alta preparación del especialista, en particular, de la rama agropecuaria, que le permita optimizar los recursos y obtener los mayores rendimientos en los procesos productivos agrícolas.

Los métodos cualitativos tradicionales de toma de decisiones se han vuelto inoperantes, quizá validos únicamente para pequeños proyectos. En proyectos grandes se hace necesario que el profesional agropecuario tenga un conocimiento básico de las herramientas cuantitativas que utilizan los especialistas para poder trabajar con ellos y aplicarlos para optimizar las distintas tareas productivas, como son producción, planificación, finanzas, ventas, mezclas de productos, formulación de fertilizantes naturales, distribución de tierras…entre otros, con miras a obtener los máximos beneficios en el campo agropecuario.

La Programación Lineal en las ciencias agropecuarias permite brindar criterios y herramientas básicas para manejar e interpretar cada vez mejor la actividad agrícola, satisfacer las demandas de nuevas tecnologías para producir en mercados globales altamente competitivos resguardando los recursos naturales y tomar

decisiones a mediano y largo plazo en condiciones similares de experimentación (Ortega, 2000).

En particular, las técnicas de modelación matemática representan una novedosa alternativa ya que estas permiten al ingeniero agrícola analizar la mejor alternativa de planificación, optimizar recursos, transportación, teniendo en cuenta limitaciones reales (Callejas, 2008).

La modelación entendida como el proceso mediante el cual un investigador construye un modelo que representa un objeto o sistema real, es una herramienta para resolver determinados problemas. La importancia que tiene los modelos matemáticos en la rama agropecuaria, radica, por ejemplo, en que permite establecer la relación entre la dosis de fertilización de un cultivo y su rendimiento, así como optimizar recursos en una tarea agrícola, relacionar los procesos químicos, físicos, mecánicos, biológicos y sociales que ocurren en los agro sistemas, reconociendo las especies y variedades de plantas y animales presentes, con preceptos de conservación y protección.

Por otro lado, el médico veterinario requiere evaluar una determinada enfermedad de acuerdo a las condiciones climáticas o del lugar donde se encuentren los animales, establecer cuál es el tratamiento óptimo a suministrarle a su paciente. Analiza además las curvas de crecimiento de animales y de producción de leche, las curvas de respuesta a diferentes medicamentos (Quintero *et al*., 2010).

Luego, es importante que los profesionales de las ciencias agropecuarias comprendan con claridad como las herramientas matemáticas les permiten analizar un fenómeno o crear un modelo matemático nuevo para reflejar la realidad de su entorno, o sea, que pueden utilizar de manera aceptada y consciente las matemáticas en la solución de problemas agropecuarios utilizando además los

softwares existentes de acuerdo a las complejidades de solución que se pueden presentar (Yepis, 1999).

Teniendo en cuenta estos elementos y las necesidades de un creciente desarrollo científico del país en la rama agropecuaria, en este libro se desarrollan un grupo de ejemplos reales provenientes de diversas investigaciones agrícolas, con el objetivo de exponer el uso de las herramientas matemáticas aplicadas a los mismos, para lo cual se hace necesario el uso de recursos informáticos, en este caso son utilizados dos programas matemáticos, el software de acceso libre, como es GeoGebra que nos permite visualizar los procesos y el complemento de Excel conocido como Solver, cuando el modelo tenga una mayor complejidad.

UNIDAD I. ANÁLISIS CUANTITATIVO Y CONSTRUCCIÓN DE MODELOS

Historia de la Investigación de Operaciones

La primera actividad de Investigación de operaciones se dio durante la segunda guerra mundial en Gran Bretaña, donde la administración militar llamó a un grupo de científicos de distintas áreas del saber para que estudiaran los problemas tácticos y estratégicos asociados a la defensa del país.

El nombre de Investigación de operaciones fue dado aparentemente porque el equipo estaba llevando a cabo la actividad de investigar operaciones (militares).

Motivados por los resultados alentadores obtenidos por los equipos británicos, los administradores militares de Estados Unidos comenzaron a realizar investigaciones similares. Para eso reunieron a un grupo selecto de especialistas, los cuales empezaron a tener buenos resultados y en sus estudios incluyeron problemas logísticos complejos, la planeación de minas en el mar y la utilización efectiva del equipo electrónico.

Al término de la guerra y atraídos por los buenos resultados obtenidos por los estrategas militares, los administradores industriales empezaron a aplicar las herramientas de la investigación de operaciones a la resolución de sus problemas que empezaron a originarse debido al crecimiento del tamaño y la complejidad de las industrias.

Aunque se ha acreditado a Gran Bretaña la iniciación de la Investigación de operaciones como una nueva disciplina, los Estados Unidos tomaron pronto el liderazgo en este campo rápidamente creciente. La primera técnica matemática ampliamente aceptada en el medio de investigación de operaciones fue el método

simplex de programación lineal, desarrollado en 1947 por el matemático norteamericano George B. Dantzig. Desde entonces las nuevas técnicas se han desarrollado gracias al esfuerzo y cooperación de las personas interesadas tanto en el área académica como en el área industrial.

Un segundo factor en el progreso impresionante de la investigación de operaciones fue el desarrollo de la computadora digital, que con sus tremendas capacidades de velocidad de cómputo y de almacenamiento y recuperación de información, permitieron al tomador de decisiones rapidez y precisión.

Si no hubiera sido por la computadora digital, la investigación de operaciones con sus grandes problemas de computación no hubiera crecido al nivel de hoy en día.

Actualmente la Investigación de Operaciones se está aplicando en muchas actividades. Estas actividades han ido más allá de las aplicaciones militares e industriales, para incluir hospitales, instituciones financieras, bibliotecas, planeación urbana, sistemas de transporte y sistemas de comercialización.

Características de la Investigación de Operaciones

Los objetivos de toda organización serán siempre alcanzar el liderato en su rama, controlando la eficiencia y efectividad de todas sus componentes por medio de métodos que permitan encontrar las relaciones óptimas que mejor operen el sistema, dado un objetivo específico.

Ante el tremendo avance que se ha dado en casi todas las ciencias en las últimas décadas, ya no es factible querer saber un poco de todo, sino más bien especializarse en alguna rama de la ciencia. Los problemas que se presentan en las organizaciones no fácilmente se pueden resolver por un sólo especialista. Por el contrario, son

problemas multidisciplinarios, cuyo análisis y solución requieren de la participación de varios especialistas. Estos grupos interdisciplinarios necesariamente requieren de un lenguaje común para poder entenderse y comunicarse, donde la Investigación de Operaciones viene a ser ese puente de comunicación.

El enfoque de la Investigación de Operaciones es el mismo del método científico. En particular, el proceso comienza por la observación cuidadosa y la formulación del problema y sigue con la construcción de un modelo científico (por lo general matemático) que intenta abstraer la esencia del problema real. En este punto se propone la hipótesis de que el modelo es una representación lo suficientemente precisa de las características esenciales de la situación como para que las conclusiones (soluciones) obtenidas sean válidas también para el problema real. Esta hipótesis se verifica y modifica mediante las pruebas adecuadas. Entonces, en cierto modo, la Investigación de Operaciones incluye la investigación científica creativa de las propiedades fundamentales de las operaciones. Sin embargo, existe más que esto. En particular, la Investigación de Operaciones se ocupa también de la administración práctica de la organización. Así, para tener éxito, deberá también proporcionar conclusiones positivas y claras que pueda usar el tomador de decisiones cuando las necesite.

La contribución del enfoque de Investigación de Operaciones proviene principalmente de:

La estructuración de una situación de la vida real como un modelo matemático, logrando una abstracción de los elementos esenciales para que pueda buscarse una solución que concuerde con los objetivos del tomador de decisiones. Esto implica tomar en cuenta el problema dentro del contexto del sistema completo.

El análisis de la estructura de tales soluciones y el desarrollo de procedimientos sistemáticos para obtenerlas.

El desarrollo de una solución, incluyendo la teoría matemática si es necesario, que lleva al valor óptimo de la medida de lo que se espera del sistema (o quizá que compare los cursos de acción opcionales evaluando esta medida para cada uno).

Definición

Investigación de Operaciones o Investigación Operacional. Se puede definir de la siguiente manera: "La Investigación de Operaciones es la aplicación por grupos interdisciplinarios del método científico a problemas relacionados con el control de las organizaciones o sistemas a fin de que se produzcan soluciones que mejor sirvan a los objetivos de toda la organización".

Metodología de la Investigación de Operaciones

El proceso de la Investigación de Operaciones comprende las siguientes fases:

1. Formulación y definición del problema.
2. Construcción del modelo.
3. Solución del modelo.
4. Validación del modelo.
5. Implementación de resultados.

Demos una explicación de cada una de las fases:

Formulación y definición del problema

En esta fase del proceso se necesita: una descripción de los objetivos del sistema, es decir, qué se desea optimizar; identificar las variables implicadas, ya sean controlables o no; determinar las restricciones del sistema. También hay que tener en cuenta las alternativas

posibles de decisión y las restricciones para producir una solución adecuada.

Construcción del modelo.

En esta fase, el investigador de operaciones debe decidir el modelo a utilizar para representar el sistema. Debe ser un modelo tal que relacione a las variables de decisión con los parámetros y restricciones del sistema. Los parámetros (o cantidades conocidas) se pueden obtener ya sea a partir de datos pasados o ser estimados por medio de algún método estadístico. Es recomendable determinar si el modelo es probabilístico o determinístico. El modelo puede ser matemático, de simulación o heurístico, dependiendo de la complejidad de los cálculos matemáticos que se requieran.

Solución del modelo.

Una vez que se tiene el modelo, se procede a derivar una solución matemática empleando las diversas técnicas y métodos matemáticos para resolver problemas y ecuaciones. Debemos tener en cuenta que las soluciones que se obtienen en este punto del proceso, son matemáticas y debemos interpretarlas en el mundo real. Además, para la solución del modelo, se deben realizar análisis de sensibilidad, es decir, ver cómo se comporta el modelo a cambios en las especificaciones y parámetros del sistema. Esto se hace, debido a que los parámetros no necesariamente son precisos y las restricciones pueden estar equivocadas.

Validación del modelo.

La validación de un modelo requiere que se determine si dicho modelo puede predecir con certeza el comportamiento del sistema. Un método común para probar la validez del modelo, es someterlo a datos pasados disponibles del sistema actual y observar si reproduce las situaciones pasadas del sistema. Pero como no hay

seguridad de que el comportamiento futuro del sistema continúe replicando el comportamiento pasado, entonces siempre debemos estar atentos de cambios posibles del sistema con el tiempo, para poder ajustar adecuadamente el modelo.

Implementación de resultados.

Una vez que hayamos obtenido la solución o soluciones del modelo, el siguiente y último paso del proceso es interpretar esos resultados y dar conclusiones y cursos de acción para la optimización del sistema. Si el modelo utilizado puede servir a otro problema, es necesario revisar, documentar y actualizar el modelo para sus nuevas aplicaciones.

Estructura de los modelos empleados en la Investigación de Operaciones.

El enfoque de la Investigación de Operaciones es el modelaje. Un modelo es una herramienta que nos sirve para lograr una visión bien estructurada de la realidad. Así, el propósito del modelo es proporcionar un medio para analizar el comportamiento de las componentes de un sistema con el fin de optimizar su desempeño. La ventaja que tiene el sacar un modelo que represente una situación real, es que nos permite analizar tal situación sin interferir en la operación que se realiza, ya que el modelo es como si fuera “un espejo” de lo que ocurre.

Los modelos más importantes para la investigación de operaciones, son los modelos simbólicos o matemáticos, que emplean un conjunto de símbolos y funciones para representar las variables de decisión y sus relaciones para describir el comportamiento del sistema. El uso de las matemáticas para representar el modelo, el cual es una representación aproximada de la realidad, nos permite aprovechar las computadoras de alta velocidad y técnicas de solución con matemáticas avanzadas.

Un modelo matemático comprende principalmente tres conjuntos básicos de elementos. Estos son: variables y parámetros de decisión, restricciones y función objetivo.

Variables y parámetros de decisión. **-** Las variables de decisión son las incógnitas (o decisiones) que deben determinarse resolviendo el modelo. Los parámetros son los valores conocidos que relacionan las variables de decisión con las restricciones y función objetivo. Los parámetros del modelo pueden ser determinísticos o probabilísticos.

***Restricciones*. -** Para tener en cuenta las limitaciones tecnológicas, económicas y otras del sistema, el modelo debe incluir restricciones (implícitas o explícitas) que restrinjan las variables de decisión a un rango de valores factibles.

***Función objetivo*. -** La función objetivo define la medida de efectividad del sistema como una función matemática de las variables de decisión.

La solución óptima será aquella que produzca el mejor valor de la función objetivo, sujeta a las restricciones.

Concepto de optimización.

Una característica adicional, que se mencionó como de pasada, es que la Investigación de Operaciones intenta encontrar la mejor solución, o la solución óptima, al problema bajo consideración. En lugar de contentarse con sólo mejorar el estado de las cosas, la meta es identificar el mejor curso de acción posible. Aun cuando debe interpretarse con todo cuidado, esta “búsqueda de la optimalidad” es un aspecto muy importante dentro de la Investigación de Operaciones.

Áreas de aplicación de la Investigación de Operaciones.

Como su nombre lo dice, Investigación de Operaciones significa "hacer investigación sobre las operaciones". Esto dice algo del enfoque como del área de aplicación. Entonces, la Investigación de Operaciones se aplica a problemas que se refieren a la conducción y coordinación de operaciones o actividades dentro de una organización. La naturaleza de la organización es esencialmente inmaterial y, de hecho, la Investigación de Operaciones se ha aplicado en los negocios, la industria, la milicia, el gobierno, los hospitales, etc. Así, la gama de aplicaciones es extraordinariamente amplia. Casi todas las organizaciones más grandes del mundo (alrededor de una docena) y una buena proporción de las industrias más pequeñas cuentan con grupos bien establecidos de Investigación de Operaciones. Muchas industrias, incluyendo la aérea y de proyectiles, la automotriz, la de comunicaciones, computación, energía eléctrica, electrónica, alimenticia, metalúrgica, minera, del papel, del petróleo y del transporte, han empleado la Investigación de Operaciones. Las instituciones financieras, gubernamentales y de salud están incluyendo cada vez más estas técnicas.

Para ser más específicos, se consideran algunos problemas que se han resuelto mediante algunas técnicas de Investigación de Operaciones. La programación lineal se ha usado con éxito en la solución de problemas referentes a la asignación de personal, la mezcla de materiales, la distribución y el transporte y las carteras de inversión. La programación dinámica se ha aplicado con buenos resultados en áreas tales como la planeación de los gastos de comercialización, la estrategia de ventas y la planeación de la producción. La teoría de colas ha tenido aplicaciones en la solución de problemas referentes al congestionamiento del tráfico, al servicio de máquinas sujetas a descomposturas, a la determinación del nivel de la mano de obra, a la programación del tráfico aéreo, al diseño de presas, a la programación de la producción y a la administración de

hospitales. Otras técnicas de Investigación de Operaciones, como la teoría de inventarios, la teoría de juegos y la simulación, han tenido exitosas aplicaciones en una gran variedad de contextos.

Técnicas de la Investigación de Operaciones.

Utilizando métodos determinísticos y probabilísticos la investigación operativa permite encontrar soluciones óptimas a los problemas originados en la actividad de la empresa, además de simular las diversas políticas, con lo cual se limitan los riesgos de decisiones.

Para resolver estos problemas se han desarrollado técnicas que se especializan en una determinada área, con el fin de comprenderla, analizarla y presentar mejoras que contribuya a aumentar su productividad.

Las explicaciones y aplicaciones de estas técnicas se producen en situaciones en las que un servicio dispone de medios limitados para satisfacer la demanda de los usuarios. A continuación, se presentan algunas de las técnicas de la investigación de operaciones.

***Teoría de juegos*.** Es una teoría matemática que estudia las características generales de situaciones donde hay competencia, dando importancia especial a los procesos de toma de decisiones de los adversarios. Ejemplos de esta situación pueden ser las campañas publicitarias para productos competitivos y planeación de estrategias destinadas a ganarle clientes a la competencia.

***Teoría de colas*.** Esta teoría, llamada también líneas de espera, se ocupa de las llegadas aleatorias a una instalación de servicio o de procesamiento de capacidad limitada. Este modelo tiene por objetivo permitir la determinación del número óptimo de personal o de instalaciones que se requieran para dar servicio a los clientes que lleguen en forma aleatoria al considerar el costo de servicio y el de

las esperas o congestiones. Un problema de inventario puede considerarse como de línea de espera. El objetivo de la mayor parte de las investigaciones sobre colas consiste en modificar el sistema para hacerlo más eficiente.

***Teoría de inventario*.** Esta teoría busca mejorar las actividades organizacionales de una empresa, con lo cual se logra menos costo de operación. Se busca formular modelos y desarrollar reglas de decisión para determinar cuánto, cuando, la forma y el tiempo de un pedido que permita minimizar los costos y prestar un mejor servicio.

***Simulación*.** Es una técnica numérica para conducir experimentos que permiten diseñar un modelo de un sistema real y llevar a término experiencias con él, con la finalidad de comprender el comportamiento del sistema o evaluar nuevas estrategias.

***Operación con redes*.** Son técnicas que permiten planear, controlar y tomar decisiones relativas a proyectos grandes y complejos; para evaluar la secuencia de un programa de investigación y desarrollo. El objetivo básico de estas técnicas es determinar cuál combinación, tiempo-costo, debe usarse para cada actividad, con el fin de satisfacer el tiempo programado al costo mínimo. Los métodos más utilizados son el CPM que es determinístico y el PERT que usa elementos probabilísticos.

***Cadenas de Markov*.** Este tipo de análisis es una forma de estudiar el movimiento actual de alguna variable, a fin de pronosticar su movimiento futuro. En investigaciones de mercadotecnia permite examinar y pronosticar el comportamiento de los clientes desde el punto de vista de su lealtad de una marca y de su forma de cambios a otra.

A continuación, la tabla 1, ilustra las técnicas de investigación de operaciones.

Tabla 1. Técnicas de Investigación de Operaciones

Técnica	Definición	Objetivo	Aplicaciones
Teoría de Juegos	Estudia las características generales de situaciones competitivas, enfocándose en los procesos de toma de decisiones de los adversarios.	Diseñar estrategias óptimas en contextos de competencia.	Campañas publicitarias, planeación estratégica para atraer clientes y superar a la competencia.
Teoría de Colas	Analiza llegadas aleatorias a instalaciones de capacidad limitada para optimizar la atención al cliente.	Determinar el número óptimo de personal o instalaciones, minimizando costos de servicio y esperas.	Gestión de líneas de espera en servicios, mejora en la atención al cliente, análisis de congestión en inventarios.
Teoría de Inventario	Desarrolla modelos y reglas para determinar cuánto, cuándo, cómo y en qué momento realizar pedidos.	Minimizar costos operativos y mejorar el servicio.	Gestión de inventarios, reducción de costos en almacenamiento, planificación eficiente de insumos.

Simulación	Técnica numérica que permite diseñar un modelo de un sistema real y realizar experimentos con él para comprender su comportamiento o evaluar estrategias.	Comprender el sistema o evaluar nuevas estrategias para su mejora.	Modelos de sistemas reales en diversos sectores: industrial, comercial y servicios.
Operación con Redes	Técnicas como CPM (determinístico) y PERT (probabilístico) que ayudan a planificar, controlar y tomar decisiones en proyectos grandes y complejos.	Determinar combinaciones óptimas de tiempo y costo para cumplir con plazos al menor costo posible.	Gestión de proyectos grandes: investigación y desarrollo, construcción, programación de actividades complejas.

Cadenas de Markov	Analiza el movimiento actual de una variable para pronosticar su movimiento futuro, como el comportamiento de los clientes en términos de lealtad o cambio de marcas.	Pronosticar comportamientos futuros en sistemas probabilísticos.	Investigación de mercados, análisis de lealtad de clientes, predicciones en sistemas dinámicos.

Fuente: Elaboración propia a partir de contenido proporcionado por el usuario.

UNIDAD II. MODELOS DE PROGRAMACION LINEAL

La Modelización Matemática es un proceso envuelto en la obtención de un modelo. Un modelo matemático de un fenómeno es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que traducen, de alguna forma, el fenómeno en cuestión. El modelo permite no sólo obtener una solución particular sino también servir de soporte para otras aplicaciones o teorías. En la práctica, ese conjunto de símbolos y relaciones puede estar vinculado a cualquier rama de la matemática, en particular, a los instrumentos fundamentales de las aplicaciones matemáticas.

Modelo de Programación Lineal

En un modelo de programación lineal los términos clave son recursos y actividades, en donde “m” denota el número de distintos tipos de recursos que se pueden usar y “n” denota el número de actividades bajo consideración, lo que se constituirán en las restricciones del modelo. Algunos ejemplos de recursos son dinero y tipos especiales de maquinaria, equipo, vehículos y personal. Los ejemplos de actividades incluyen inversión en proyectos específicos, publicidad en un medio determinado y el envío de bienes de cierta fuente a cierto destino. En cualquier aplicación de programación lineal, puede ser que todas las actividades sean de un tipo general (como cualquiera de los ejemplos), y entonces cada una correspondería en forma individual a las alternativas específicas dentro de esta categoría general.

El tipo más usual de aplicación de programación lineal involucra la asignación de recursos a ciertas actividades. La cantidad disponible de cada recurso está limitada, de forma que deben asignarse con todo cuidado. La determinación de esta asignación incluye elegir los

niveles de las actividades que lograrán el mejor valor posible de la medida global de efectividad.

Ciertos símbolos se usan de manera convencional para denotar las distintas componentes de un modelo de programación lineal. Estos símbolos se enumeran a continuación, junto con su interpretación para el problema general de asignación de recursos a actividades.

Z = valor de la medida global de efectividad (función objetivo)

x_j = nivel de la actividad j (para j = 1,2,...,n)

c_j = incremento en Z que resulta al aumentar una unidad en el nivel de la actividad j

b_i = cantidad de recurso i disponible para asignar a las actividades (para i = 1,2,...,m)

a_{ij} = cantidad del recurso i consumido por cada unidad de la actividad j

El modelo establece el problema en términos de tomar decisiones sobre los niveles de las actividades, por lo que x_1, x_2,....,x_n se llaman variables de decisión. Los valores de c_j, b_i y a_{ij} (para i = 1,2,...., m y j = 1,2,...., n) son las constantes de entrada al modelo. Las c_j, b_i y a_{ij} también se conocen como parámetros del modelo.

Forma Estándar del modelo de PL

Ahora se puede formular al modelo matemático para este problema general de asignación de recursos a actividades. En Datos necesarios para un modelo de programación lineal que maneja la asignación de recursos a actividades particular, este modelo consiste en elegir valores de x_1, x_2,...., x_n para:

Optimizar (maximizar o minimizar) $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$,

Sujeta a las restricciones:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n < b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n < b_2$$

$$.$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n < b_m$$

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0, \quad ..., \quad x_n \geq 0$$

Estas últimas restricciones, se las denomina de no Negatividad o lógicas.

Formulación de modelos de Programación Lineal

Aunque se ponga en duda, la parte más difícil de PL es reconocer cuándo ésta puede aplicarse y formular el problema matemáticamente. Una vez hecha esa parte, resolver el problema casi siempre es fácil.

Para formular un problema en forma matemática, deben expresarse afirmaciones lógicas en términos matemáticos. Esto se realiza cuando se resuelven “problemas hablados” al estudiar un curso de álgebra. Algo muy parecido sucede aquí al formular las restricciones. Por ejemplo, considérese la siguiente afirmación: A usa 3 horas por unidad y B usa 2 horas por unidad. Si deben usarse todas las 100 horas disponibles, la restricción será:

$$3A + 2B = 100$$

Sin embargo, en la mayoría de las situaciones de negocios, no es obligatorio que se usen todos los recursos (en este caso, horas de mano de obra). Más bien la limitación es que se use, cuando mucho, lo que se tiene disponible. Para este caso, la afirmación anterior puede escribirse como una desigualdad:

$$3A + 2B \leq 100$$

Para que sea aceptable para PL, cada restricción debe ser una suma de variables con exponente 1. Los cuadrados, las raíces cuadradas, etc. no son aceptables, ni tampoco los productos de variables. Además, la forma estándar para una restricción pone a todas las variables del lado izquierdo y sólo una constante positiva o cero del lado derecho. Esto puede requerir algún reacomodo de los términos. Si, por ejemplo, la restricción es que A debe ser por los menos el doble de B, esto puede escribirse como:

$A \geq 2B$ o $A - 2B \geq 0$

Nótese que pueden moverse términos de un lado a otro de las desigualdades como si fuera un signo de igualdad. Pero al multiplicar una desigualdad por -1, el sentido de esta desigualdad se invierte. Puede ser necesario hacer esto para que los coeficientes del lado derecho sean positivos. Por ejemplo, si se quiere que A sea por lo menos tan grande como B - 2, entonces:

$A \geq B - 2$ o $A - B \geq -2$

Por último, $B - A \leq 2$

Una nota final sobre desigualdades: es sencillo convertir una desigualdad en una ecuación. Todo lo que se tiene que hacer es agregar (o restar) una variable extra. Por ejemplo:

$B - A \leq 2$ es lo mismo que $B - A + S = 2$

En donde S representa la diferencia, o la holgura, entre B - A y 2. S se llama variable de holgura. Por otro lado, se restaría una variable de superávit en el caso siguiente:

$A - 2B \geq 0$ es lo mismo que $A - 2B - S = 0$

La metodología de PL requiere que todas las variables sean positivas o cero, es decir, no negativas. Para la mayoría de los problemas esto

es real, no se querría una solución que diga: prodúzcanse menos dos cajas o contrátense menos cuatro personas.

Mientras que no existe un límite en el número de restricciones que puede tener un problema de PL, sólo puede haber un objetivo. La forma matemática del objetivo se llama función objetivo. Debe llevar consigo el maximizar o minimizar alguna medida numérica. Podría ser maximizar el rendimiento, la ganancia, la contribución marginal o los contactos con los clientes. Podría ser minimizar el costo, el número de empleados o el material de desperdicio. Con frecuencia el objetivo es evidente al observar el problema.

Como el valor de la función objetivo no se conoce hasta que se resuelve el problema, se usa la letra Z para representarlo. La función objetivo tendrá, entonces, la forma:

Maximizar $Z = 4A + 6B$ o también,

Minimizar $Z = 2x_1 + 5x_2$

Consejos para formular modelos de programación lineal

Debemos considerar los siguientes aspectos, al momento de establecer el modelo de P.L, de un problema:

1. Lea el planteamiento del problema con cuidado.

2. Identifique las variables de decisión. Éstas son las decisiones que se necesita realizar. Una vez identificadas estas decisiones, clasifíquelas al proporcionar una definición matemática (por ejemplo, x_1 = número de unidades producidas y vendidas por semana del producto 1, x_2 = números de unidades producidas y vendidas por semana del producto 2).

3. Identifique el objetivo. ¿Qué es lo que se debe maximizar o minimizar (por ejemplo, maximizar la utilidad semanal total de fabricar los productos 1 y 2)?

4. Identifique las restricciones estructurales. ¿Qué condiciones se deben satisfacer cuando asignamos valores a las variables de decisión? Tal vez necesite escribir una descripción verbal de la restricción antes de escribir la representación matemática (por ejemplo, la producción total del producto 1 ≥ 100 unidades; entonces $x_1 \geq 100$). También, siéntase cómodo con el hecho de que las restricciones estructurales para un problema de programación lineal dado pueden expresar una gran variedad de unidades. Es decir, dado el conjunto de variable x_j, es posible formular restricciones estructurales que expresen condiciones medidas en dólares, horas, unidades producidas, etc. Simplemente debe estar seguro de que la dimensión para cualquier restricción dada es consistente en ambos lados de la restricción.

5. Formule el modelo matemático. Dependiendo del problema, podría empezar por definir la función objetivo o las restricciones estructurales. ¡No olvide incluir la restricción no negativa!

Problemas de Modelación

Planeación de la producción agrícola

Por lo regular, el problema estriba en seleccionar el conjunto de alternativas que incrementará al máximo los beneficios totales sujetos a las restricciones del presupuesto y otras restricciones que podrían afectar la selección de un proyecto. Para construir los elementos del modelo usualmente es necesario establecer los siguientes valores:

Definir los cultivos o actividades.

Calcular las necesidades de mano de obra y capital para explotar esas actividades.

Estimar la ganancia por actividad por hectárea proyectada al período en el que se desarrollaría cada actividad.

Definir el área disponible con riego para el proyecto agrícola.

Evaluar la mano de obra disponible en la zona.

Determinar el monto del capital inicial que se podía disponer para iniciar el proyecto.

Entre otros aspectos que se podrían considerar.

Los ejemplos que a continuación se desarrollan, van de procesos sencillos y poco a poco van elevando su nivel de complejidad.

Un granjero tiene 100 hectáreas en los cuales puede sembrar dos cultivos. Dispone de $ 3000 a fin de cubrir el costo del sembrado. El granjero puede confiar en un total de 1350 horas-hombre destinadas a la recolección de los dos cultivos y en el cuadro se muestra los siguientes datos por hectárea:

Tipo de cultivo	Costo de plantar	Demanda horas-hombre	Utilidad
pimiento	$20	5	$ 100
tomate	$40	20	$ 300

Determina el modelo de programación lineal que permita maximizar la utilidad o ganancia.

Solución: Primero Definimos las variables.

x_1 = número de hectáreas de pimiento.

x_2 = número de hectáreas de pimiento.

Luego, determinamos la función objetivo:

Maximizar la Utilidad = $100x_1 + 300x_2$

Y por último establecemos las restricciones:

$x_1 + x_2 \leq 100$, Número máximo de hectáreas de tierra.

$5x_1 + 20x_2 \leq 1350$, Número máximo de horas-hombre.

$20x_1 + 40x_2 \leq 3000$, Presupuesto que se dispone para el sembrado.

$x_1, x_2 > 0$, No negatividad (No tiene sentido que estos valores sean negativos).

Un agricultor posee un campo de 70 hectáreas y puede cultivar ya sea trigo o cebada. Si siembra trigo gasta $ 30 por cada hectárea plantada. En cambio, sí siembra cebada, su gasto es de $ 40 por hectárea. El capital total disponible es de $ 2.500. Por otra parte, también existen restricciones en la disponibilidad de agua para los meses de octubre y noviembre, según se indica:

Mes	Consumo m^3/ha trigo	Consumo m^3/ha cebada	Disponibilidad de agua
Octubre	900	650	57.900
Noviembre	1200	850	115.200

Una hectárea cultivada rinde 30 Tn de trigo o 25 Tn de cebada según sea el caso. Los precios vigentes por Tn son de $ 4,5 para el trigo y $ 6,0 para la cebada. Determinar el modelo matemático que considere la cantidad de hectáreas de trigo y de cebada que debe sembrar el agricultor para que maximice su beneficio.

Variables:

x_1 = Cantidad de hectáreas de trigo

x_2 = Cantidad de hectáreas de cebada

Función Objetivo: se multiplica el rendimiento por su precio y le restamos el costo

Utilidad = $[30(4,5) – 30]\ x_1 + [25(6) – 40]\ x_2$

$U= 105\ x_1+ 110\ x_2$

Restricciones

Limitaciones de tierra: $x_1 + x_2 \leq 70$

Disponibilidad de capital: $30x_1 + 40x_2 \leq 2500$

Disponibilidad de agua (octubre): $900\ x_1 + 650\ x_2 \leq 57900$

Disponibilidad de agua (noviembre): $1200\ x_1 + 850\ x_2 \leq 115200$

Lógicas o de signos: $x_1, x_2 \geq 0$

Una familia de granjeros posee 100 hectáreas de tierra y tiene $30000 en fondos disponibles para inversión. Sus miembros pueden producir un total de 3500 horas-hombre de mano de obra durante los meses de invierno (de mediados de septiembre a mediados de mayo), 4000 horas-hombre durante el verano. Si no se necesitan cualesquiera de estas horas-hombre, los miembros más jóvenes de la familia usarán para trabajar en una granja vecina por $4.00/hora, durante los meses de invierno, y $4.50/hora, durante el verano.

El ingreso de efectivo puede obtenerse a partir de tres cultivos y dos tipos de animales: vacas lecheras y gallinas ponedoras. No se necesita invertir en los cultivos. Sin embargo, cada vaca requerirá un desembolso de $900 y cada gallina requerirá de $7. Cada vaca requerirá 1.5 hectáreas de tierra, 100 horas-hombre de trabajo durante los meses de invierno, y otras 50 horas-hombre durante el verano. Cada vaca producirá un ingreso anual neto en efectivo de $800 para la familia. Los valores correspondientes para las gallinas son: nada de tierra, 0,6 horas hombre durante el verano y un ingreso

anual neto en efectivo de $5. El gallinero puede acomodar un máximo de 300 gallinas y el tamaño del granero limita el rebaño a un máximo de 32 vacas. Las horas hombres y los ingresos estimados por acre plantado en cada uno de los tres cultivos se muestran en la siguiente tabla.

Distribución de horas hombre e ingresos estimados

	frijol de soya	maíz	avena
Horas hombre en invierno Horas hombre en verano	20 50	35 75	10 40
Horas anuales neto en efectivo($)	375	550	250

La familia desea saber cuántas hectáreas deben plantarse en cada uno de cultivos y cuántas vacas y gallinas deben tener para maximizar su ingreso neto de efectivo. Determine un modelo de programación lineal para este problema.

Declaración de variables:

x_1 : Número de hectáreas de tierra asignados para el frijol de soya.

x_2 : Número de hectáreas de tierra asignados para el maíz.

x_3 : Número de hectáreas de tierra asignados para la avena.

x_4 : Número de vacas.

x_5 : Número de gallinas.

x_6 : Horas-hombre ociosas en invierno.

x_7 : Horas-hombre ociosas en verano.

Función objetivo:

Minimizar costo $C = 375x_1 + 550x_2 + 250x_3 + 800x_4 + 5x_5 + 4x_6 + 4.5x_7$

Restricciones:

Disponibilidad de tierra: $x_1 + x_2 + x_3 + 1.5x_4 \leq 100$

Capacidad del gallinero: $x_5 \leq 300$

Tamaño del rebaño: $x_4 \leq 32$

Limitación de horas/hombre en invierno: $20x_1 + 35x_2 + 10x_3 + 100x_4 = 3500$

Limitación de horas/hombre en verano: $50x_1 + 75x_2 + 40x_3 + 50x_4 + 0{,}6x_5 + x_7 = 4000$

$900\ x_4 + 7x_5 \leq 30000$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

Un agricultor tiene 500 hectáreas de terreno para cultivar próximamente y desea planificar tal cultivo. Sabe que necesitará disponer de 200 toneladas de trigo y 240 toneladas de maíz para alimentar a su ganado, lo que puede obtener mediante su propia cosecha o mediante compra en el mercado. Lo que produzca, y que no dedique a su ganado, lo puede vender. Los precios de venta son de $170 y $150 por cada tonelada de trigo y de maíz, respectivamente. Los precios de compra son un 40% superior debido a las ganancias de intermediarios y a los costos de transporte.

Otro cultivo posible es el de caña de azúcar, que se vende a $36 cada tonelada producida. Sin embargo, normas del Ministerio de Agricultura imponen una cuota máxima para la producción de azúcar, lo que conlleva que cada tonelada de caña de azúcar

producida sobre tal cuota tendrá un precio de venta de $10. Para el próximo cultivo se espera que tal cuota sea 6000 toneladas.

Basado en experiencias anteriores, el agricultor conoce que la producción media es 2.5, 3 y 20 toneladas por hectárea de trigo, maíz y caña de azúcar, respectivamente. El costo de plantar una hectárea de trigo, maíz y caña de azúcar es de $150, $230 y $260, respectivamente. Plantear un modelo matemático cuya solución pueda ayudar al agricultor en su deseo de maximizar sus beneficios.

Declaración de variables:

X_1 = hectáreas que dedicará a trigo

X_2 = hectáreas que dedicará a maíz

X_3 = hectáreas que dedicará a azúcar

Y_1 = toneladas que comprará de trigo

Y_2 = toneladas que comprará de maíz

W_1 = toneladas que venderá de trigo

W_2 = toneladas que venderá de maíz

W_3 = toneladas que venderá de azúcar a $36

W_4 = toneladas que venderá de azúcar a $10

Función objetivo:

Maximizar el beneficio: $U = -150 X_1 - 230X_2 -260X_3 -238Y_1 -210Y_2 +170W_1 +150W_2 +36W_3 +10W_4$

Restricciones:

$X_1 + X_2 + X_3 \leq 500$

$2.5X_1 + Y_1 – W_1 \geq 200$

$3X_2 + Y_2 - W_2 \leq 240$

$W_3 + W_4 \leq 20\ X_3$

$W_3 \leq 6000$

$X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, W_1, W_2, W_3, W_4 \geq 0$

Este modelo de Programación Lineal, mediante algún método de resolución es posible concluir que una solución óptima es: $X_1 = 120$, $X_2 = 80$, $X_3 = 300$, $Y_1 = 0$, $Y_2 = 0$, $W_1 = 100$, $W_2 = 0$, $W_3 = 6000$, $W_4 = 0$

Con beneficio óptimo 118600. Esto significa que el agricultor deberá dedicar 120 hectáreas a trigo, 80 a maíz y 300 a caña de azúcar, y con ello se espera que venderá 100 toneladas de trigo y la cuota máxima de azúcar (es decir, al precio más favorable), obteniendo un beneficio total de $118600.

Usted tiene 60 hectáreas de tierra que aún no ha cultivado, y piensa trabajarlas para la próxima temporada junto a sus dos hijos, Pedro y Javier. Pedro insiste en sembrar ajo, pues tiene una ganancia neta mayor: sacarían $300 por ha., una vez descontados los gastos, que son de $10 por ha. Javier quiere sembrar tomate, que tiene una ganancia neta de $200 por hectárea, pues están escasos de agua, y el tomate necesita menos agua que el ajo: 1 m^3 por ha., contra 2 m^3 por ha. Para el ajo. (Disponen para la época crítica de sólo 100 m^3 de agua). Su administrador, por su parte, hace notar que sólo tienen $1200 para comprar semillas, contratar obreros y otros gastos, así que posiblemente no les alcanzara el dinero para sembrar tomate, ya que los gastos son de $30 por hectárea. Formule un modelo de Programación Lineal para maximizar la ganancia.

Definición de variables:

X_1 = número de hectáreas de ajo

X_2 = número de hectáreas de tomate

Función objetivo:

Z (MAX)= 300 X_1 + 200 X_2

Restricciones:

Disponibilidad de tierra: $X_1 + X_2 \leq 60$

Presupuesto: $10\ X_1 + 30\ X_2 \leq 1200$

Disponibilidad de agua: $2\ X_1 + X_2 \leq 100$

No negatividad: $X_1, X_2 \geq 0$

La oficina técnica coordinadora de cultivos (OTCC), tiene a su cargo la administración de 3 parcelas. El rendimiento agrícola de cada parcela está limitado por la cantidad de tierra cultivable como por la cantidad de agua asignada para regadío de la parcela por la comisión de aguas. Los datos proporcionados por este organismo son los siguientes:

Parcela	Tierra Cultivable [ha]	Asignación de agua [m^3]
1	400	600
2	600	800
3	300	375
total	1300	1775

Las especies disponibles para el cultivo son la remolacha, trigo y soya, pero el Ministerio de Agricultura ha establecido un número máximo de hectáreas que pueden dedicarse a cada uno de estos

cultivos en las tres parcelas en conjunto, como lo muestra la siguiente tabla:

Especie	Consumo de Agua [m^3 / ha]	Cuota Máxima [ha]	Ganancia Neta [$ / ha]
Remolacha	3	600	400
Trigo	2	500	300
Soya	1	325	100

Los dueños de las parcelas, en un acto de solidaridad social, han convenido que en cada parcela se sembrará la misma fracción de su tierra cultivable. Sin embargo, puede cultivarse cualquier combinación en cualquiera de las parcelas. Usted como Administrador, asesore a la OTCC utilizando el método SOLVER, para determinar cuántas hectáreas se deben dedicar al cultivo de las distintas especies en cada parcela, de modo de maximizar la ganancia neta total para todas las parcelas a cargo de la OTCC.

X_1 = Cantidad de hectáreas de remolacha a sembrar en la parcela 1.

X_2 = Cantidad de hectáreas de remolacha a sembrar en la parcela 2.

X_3 = Cantidad de hectáreas de remolacha a sembrar en la parcela 3.

Y_1 = Cantidad de hectáreas de trigo a sembrar en la parcela 1.

Y_2 = Cantidad de hectáreas de trigo a sembrar en la parcela 2.

Y_3 = Cantidad de hectáreas de trigo a sembrar en la parcela 3.

Z_1 = Cantidad de hectáreas de soya a sembrar en la parcela 1.

Z_2 = Cantidad de hectáreas de soya a sembrar en la parcela 2.

Z_3 = Cantidad de hectáreas de soya a sembrar en la parcela 3

Función Objetiva:

$Z= 400(X_1+X_2+X_3) + 300(Y_1+ Y_2+Y_3) + 100(Z_1+ Z_2+Z_3)$

Restricciones:

Tierra cultivable por parcela

$X_1 + Y_1 + Z_1 \leq 400$

$X_2 + Y_2 + Z_2 \leq 600$

$X_3 + Y_3 + Z_3 \leq 300$

Disponibilidad Agua por parcela

$3X_1 + 2Y_1 + Z_1 \leq 600$

$3X_2 + 2Y_2 + Z_2 \leq 800$

$3X_3 + 2Y_3 + Z_3 \leq 375$

Cuota máxima de cultivo

$X_1 + X_2 + X_3 \leq 600$

$Y_1 + Y_2 + Y_3 \leq 500$

$Z_1 + Z_2 + Z_3 \leq 325$

Restricción 10, 11 y 12: Los dueños de las parcelas, en un acto de solidaridad social, han convenido que en cada parcela se sembrará el mismo porcentaje de su tierra cultivable

Parcela 1 = Parcela 2

$(X_1+Y_1+Z_1)/400=(X_2+Y_2+Z_2)/600$

Que al ser simplificada quedará expresada como:

$$600X_1 – 400X_2 + 600Y_1 – 400Y_2 + 600Z_1 – 400Z_2 = 0$$

Parcela 1 = Parcela 3

$(X_1+Y_1+Z_1) /400=(X_3+Y_3+Z3) /300$

$$300X_1 – 400X_3 + 300Y_1 + 400Y_3 + 300Z_1 + 400Z_3 = 0$$

Parcela 2 = Parcela 3

$(X_2+Y_2+Z_2) /600=(X_3+Y_3+Z_3) /300$

$$300X_2 - 600X_3 + 300Y_2 - 600Y_3 + 300Z_2 - 600Z_3 = 0$$

Un inversionista con ayuda de CFN pretende invertir en el cultivo de palta pretende invertir en el cultivo de aguacate, pomelo, naranja y mango en la zona de Daule (Guayas), persiguiendo dos objetivos esenciales: reducir el desempleo rural y aumentar las exportaciones. Se sabe que la producción promedio de cada árbol está dado por:

Tipo de árbol	Producción (unidades/árbol)	Promedio anual (Kg/árbol)	Observación
aguacate	350	150	una vez al año
pomelo	230	200	una vez al año
mango	150	50	una vez al año
naranja	400	150	una vez al año

El precio promedio en el mercado mundial fue de:

Aguacate: $10/kg

Pomelo: $4/kg

Mango: $15/kg

Naranja: $7/kg

Existe una extensión de 250.000 m^2 de tierra propicia para el cultivo de estos productos. Los ingenieros agrónomos consultados han determinado que las siguientes extensiones son necesarias para el cultivo de esos productos:

Tipo de árbol	Extensión mínima de Cultivo por árbol
aguacate	4 m^2
pomelo	5 m^2
mango	3 m^2
naranja	6 m^2

Afortunadamente, no existen problemas de agua pues hay buenos pozos en la zona y un canal de riego, que aseguran la existencia de ese líquido por los próximos 20 años. El costo total por sembrar cada árbol es: aguacate $ 2, pomelo $ 0,5, mango $ 1 y naranja $1.50.

Estos costos ya incluyen la compra del árbol más su cuidado y mantenimiento anual inicial. Cada árbol empieza a ser productivo aproximadamente a los tres años de ser plantado. Cada árbol requiere:

Tipo de árbol	Número de horas-hombre de cuidado al año
aguacate	36 (h-h) de cuidado al año
pomelo	72 (h-h) de cuidado al año
mango	50 (h-h) de cuidado al año
naranja	10 (h-h) de cuidado al año

El inversionista pretende invertir $20.000.000 pensando en exportar toda su producción a partir del tercer año. El desempleo en la zona

de Daule se ha calculado en 500 personas y el inversionista y CNF han delineado que este proyecto cumpla al menos con contratar 200 personas en forma continua (para que CFN apoye el proyecto). Bajo estas circunstancias cuantos arboles de aguacate, pomelo, mango y naranja deberán sembrarse con objeto de maximizar el valor de la futura exportación anual.

Solución: Definición de las variables:

X_1 = número de árboles de aguacate a ser plantados.

X_2 = número de árboles de pomelo a ser plantados.

X_3 = número de árboles de mango a ser plantados.

X_4 = número de árboles de naranjo a ser plantados.

Función objetivo:

Volumen de producción esperado = (cantidad promedio por cada árbol). (Número de árboles plantados)

$V = 150*10* X_1 + 200*4* X_2 + 50*15* X_3 + 150*7* X_4$

$V = 1500 X_1 + 800 X_2 + 750 X_3 + 1050 X_4$

Restricciones:

De la tierra: $4 X_1 + 5 X_2 + 3 X_3 + 6 X_4 \leq 250.000$

Horas-hombre: $36 X_1 + 72 X_2 + 50 X_3 + 10 X_4 \geq 200*7,5*5*52$

Capital: $2 X_1 + 0,5 X_2 + X_3 + 1,5 X_4 \leq 20.000.000$

No negatividad: $X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$

Modelo Matemático:

Maximizar $Z = 1500 X_1 + 800 X_2 + 750 X_3 + 1050 X_4$

$$4\,X_1 + 5\,X_2 + 3\,X_3 + 6\,X_4 \leq 250.000$$

$$36\,X_1 + 72\,X_2 + 50\,X_3 + 10\,X_4 \geq 390.000$$

$$2\,X_1 + 0{,}5\,X_2 + X_3 + 1{,}5\,X_4 \leq 20.000.000$$

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4 \geq 0$$

Planeación de la producción agropecuaria.

Con la finalidad de mejorar la planeación de producción, podemos hacer uso de los procesos de programación lineal, con el objetivo de maximizar el beneficio económico en este sector. En tal sentido la idea es establecer de que forman se relacionan las variables, beneficio económico, requerimiento y disponibilidad de recursos con el objetivo de mejorar el control y manejo eficiente, estructurando una planificación más organizada y que permita una mayor eficiencia en el manejo de los recursos de una empresa o emprendimiento agropecuario.

La empresa Oro lácteos plantea la producción de dos nuevas bebidas. Producir un litro del primer tipo de bebida cuesta $ 2, mientras que un litro del segundo tipo de bebida cuesta $ 5. Para realizar el lanzamiento comercial se necesitan más de 6.000 litros de bebida, aunque del segundo tipo no podrán producirse (por limitaciones técnicas) más de 5.000. Además, se desea producir más cantidad de bebida del segundo tipo que del primero. ¿Cuántos litros habrá que producir de cada tipo de bebida para que el costo de producción sea mínimo?

Definición de variables:

X_1 = número de litros del primer tipo de bebida

X_2 = número de litros del segundo tipo de bebida

Función objetiva:

Minimizar costo de producción = $2X_1 + 5X_2$

Restricciones:

$X_1 \geq 6.000$

$X_2 \leq 5.000$

$X_2 \geq X_1$ o $X_1 - X_2 \leq 0$

Una empresa vitivinícola ha adquirido recientemente un terreno de 110 hectáreas. Debido a la calidad del sol y el excelente clima de la región, se puede vender toda la producción de uvas Sauvignon Blanc y Chardonay. Se desea conocer cuánto plantar de cada variedad en las 110 hectáreas, dado los costos, beneficios netos y requerimientos de mano de obra según los datos que se muestran a continuación:

Variedad de uvas	Costos ($/hectárea)	Beneficio neto ($/hectárea)	Número de días Hombre/hectárea
Sauvignon Blanc	100	50	10
Chardonay	200	120	30

Suponga que se posee un presupuesto de $10.000 y una disponibilidad de 1.200 días hombre durante el horizonte de planificación. Formule un modelo de Programación Lineal para este problema.

Definición de variables:

X_1 = número de hectáreas destinadas al cultivo de uvas Sauvignon Blanc.

X_2 = número de hectáreas destinadas al cultivo de uvas Chardonnay.

Función Objetivo:

Maximizar el beneficio $U = 50\ X_1 + 120\ X_2$

Restricciones:

$X_1 + X_2 \leq 110$, número máximo de hectáreas para sembrar

$100X_1 + 200X_2 \leq 10.000$, presupuesto máximo

$10X_1 + 30X_2 \leq 1200$, disponibilidad de número de días hombre

$X_1, X_2 \geq 0$, No negatividad

Piscicultura: Una piscina de peces se abastece cada semestre con dos especies de peces: salmón y tilapia. Hay dos tipos de alimento F_1 y F_2 disponibles en la piscina. El peso promedio de los peces y el requerimiento diario promedio de alimento para cada pez, de cada especia está dado en el cuadro siguiente:

Tipo de pez	F_1 (unidades)	F_2 (unidades)	Peso Promedio
salmón	2	3	3 libras
tilapia	3	1	2 libras

Si hay 600 unidades de F_1 y 300 unidades F_2 todos los días. Como suministraría el suplemento a la piscina para que el peso total de los pescados sea al menos 400 libras.

Definición de variables:

x_1 = número de peces salmón

x_2 = número de peces tilapia

Función objetivo:

Maximizar el peso total $P = x_1 + x_2$

Restricciones:

$2x_1 + 3x_2 \leq 600$

$3x_1 + 1x_2 \leq 300$

$3x_1 + 2x_2 \geq 400$

$x_1, x_2 > 0$

Diseño de mezclas, dietas y alimentos.

La programación lineal ha encontrado aplicaciones amplias en un área conocida como los modelos de mezcla. Se formulan modelos de mezcla para determinar una combinación óptima de ingredientes a fin de mezclarlos en un producto final. Los modelos de mezcla se han utilizado en la mezcla de productos de petróleo, mezcla de alimentación para el uso en la agricultura, fertilizantes y semillas de pasto, licores, tés, cafés y demás. El objetivo con dichos modelos con frecuencia es minimizar el costo de la mezcla. Las restricciones comunes incluyen restricciones del tamaño del lote para cada mezcla, requerimientos tecnológicos (o receta) y disponibilidad limitada de ingredientes. Los ejemplos siguientes ilustran modelos de mezcla.

Tipo de mezcla	Cacahuate (%)	Nuez (%)	Ganancia ($)
Económica (x_1)	80	20	10
Especial (x_2)	50	50	15

Una compañía vende dos mezclas diferentes de nueces. La mezcla más económica contiene un 80% de cacahuates y un 20% de nueces, mientras que la especial contiene 50% de cada tipo. Cada semana la compañía obtiene 1800 kilos de cacahuates y 1200 kilos de nueces de sus fuentes de suministros. ¿Cuántos kilos de cada mezcla debería producir a fin de maximizar las utilidades si las ganancias son de $ 10 por cada kilo de la mezcla económica y de $ 15 por cada kilo de la mezcla especial?

Definición de variables:

x_1 = número de kilos de la mezcla económica.

x_2 = número de kilos de la mezcla especial.

Función objetivo:

Maximizar las ganancias $U = 10x_1 + 15x_2$

Restricciones:

Cantidad de kilos de cacahuates:

$0.80\ x_1 + 0.50\ x_2 \leq 1800$

Cantidad de kilos de nuez:

$0.20\ x_1 + 0.50\ x_2 \leq 1200$

No negatividad: $x1, x2 \geq 0$

Diseño de alimento de cerdos: Un granjero tiene 200 cerdos que consumen 90 libras de comida especial todos los días. El alimento se prepara como una mezcla de maíz y harina de soya con las siguientes composiciones:

Aporte de cada alimento (libras por libra de Alimento)

Tipo de alimento	Calcio	Proteína	Fibra	Costo ($/lb)
Maíz	0.001	0.09	0.02	0.2
Harina de Soya	0.002	0.6	0.06	0.6

Los requisitos de alimento de los cerdos son:

Cuando menos 1% de calcio

Por lo menos 30% de proteína

Máximo 5% de fibra

Determine la mezcla de alimentos con el mínimo de costo por día

Definición de variables:

x_1 = la Cantidad de Maíz Libra por libra de Alimento

x_2 = la Cantidad de Harina de Soya Libra por libra de Alimento

Función Objetivo:

Minimiza los costos: $C = 0.2x_1 + 0.6x_2$

Sujetos a:

$0.001x_1 + 0.002x_2 \leq (90)(0.01)$, requerimientos de calcio

$0.09x_1 + 0.6x_2 \leq (90)(0.3)$, requerimientos de proteína

$0.02x_1 + 0.06x_2 \geq (90)(0.05)$, requerimientos de fibra

$x_1, x_2 > 0$, No negatividad

Una Tienda de animales ha determinado que cada Hámster debería recibir al menos 70 unidades de proteína, 100 unidades de carbohidratos y 20 unidades de grasa. Si la tienda vende los seis tipos de alimentos mostrados en la tabla. ¿Qué mezcla de alimento satisface las necesidades a un costo mínimo para la tienda?

Tipos de Alimento	Proteínas (Unidades / Onza)	Carbohidratos (Unidades / Onza)	Grasa (Unidades / Onza)	Costo (Onza)
A	20	50	4	2
B	30	30	9	3
C	40	20	11	5
D	40	25	10	6
E	45	50	9	8
F	30	20	10	8

Definición de variables:

x_1 = número de onzas de alimento A

x_2 = número de onzas de alimento B

x_3 = número de onzas de alimento C

x_4 = número de onzas de alimento D

x_5 = número de onzas de alimento E

x_6 = número de onzas de alimento F

Función objetivo:

Minimizar el costo $C = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 8x_5 + 8x_6$

Restricciones:

Requerimientos mínimos de proteínas:

$20x_1 + 30x_2 + 40x_3 + 40x_4 + 45x_5 + 30x_6 \geq 70$

Requerimientos mínimos de carbohidratos:

$50x_1 + 30x_2 + 20x_3 + 25x_4 + 50x_5 + 20x_6 \geq 100$

Requerimientos mínimos de grasas:

$4x_1 + 9x_2 + 11x_3 + 10x_4 + 9x_5 + 10x_6 \geq 20$

No negatividad:

$x_1, x_2, x_3, x_4 > 0$

Abonagra S.A., es una empresa dedicada a la comercialización de abonos para plantas que emplea 3 tipos diferentes de ingredientes A, B y C, para conseguir 3 tipos de abonos 1, 2, y 3.

En cuanto a los ingredientes, su disponibilidad es limitada y sus costos son los siguientes:

Ingrediente	cantidad disponible (kg)	Costos ($/kg)
A	4000	1.30
B	6000	1.50
C	2000	1.00

Los precios de los abonos son:

Abono 1 $\Rightarrow$ 2.00 $/kg

Abono 2 $\Rightarrow$ 3.00 $/kg

Abono 3 $\Rightarrow$ 1.50 $/kg.

Además de lo anterior, los ingredientes han de mezclarse en proporciones específicas para asegurar una combinación adecuada:

Para el abono 1, no menos del 25 % de A y no más del 40 % de C; para el abono 2, no menos del 30 % de A, no menos del 20 % ni más del 30 % de B y no más del 15 % de C; y para el abono 3, no menos del 35 % de B.

Con todos los datos que Floranid S.A. nos ha facilitado, nos piden que determinemos: ¿Cuánta cantidad de cada tipo de abono hay que producir de forma que se maximice el beneficio de la compañía?

Así pues, con los datos facilitados, podemos construir un primer esquema que nos permitirá desarrollar el modelo de programación lineal para la resolución del problema:

Ingredientes	Abonos			cantidad disponible (kg)	costos ($/kg)
	1	2	3		
A	X_{11}	X_{12}	X_{13}	4000	1.30
B	X_{21}	X_{22}	X_{23}	6000	1.50
C	X_{31}	X_{32}	X_{33}	2000	1.00

Definición de variables:

X_{ij} : cantidad de ingrediente del tipo *i* para cada tipo de abono *j*.

Función objetivo: Utilidad = Ingresos – Gastos

Abono 1: $2.00(X_{11} + X_{21} + X_{31}) - 1.30X_{11} - 1.50X_{21} - 1.00X_{31} = 0.70X_{11} + 0.50X_{21} + 1.00X_{31}$

Abono 2: $3.00(X_{12} + X_{22} + X_{32}) - 1.30X_{12} - 1.50X_{22} - 1.00X_{32} = 1.70X_{12} + 1.50X_{22} + 2.00X_{32}$

Abono 3: $1.50(X_{13} + X_{23} + X_{33}) - 1.30X_{13} - 1.50X_{23} - 1.00X_{33} = 0.20X_{13} + 0.50X_{33}$

Maximizar: $U = 0.70X_{11} + 1.70X_{12} + 0.20X_{13} + 0.50X_{21} + 1.50X_{22} + 1.00X_{31} + 2.00X_{32} + 0.50X_{33}$

Restricciones:

Restricciones de disponibilidad

$X_{11} + X_{12} + X_{13} \leq 4000$

$X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq 6000$

$X_{31} + X_{32} + X_{33} \leq 2000$

Restricciones específicas de la mezcla

$0{,}75\ X_{11} - 0{,}25\ X_{21} - 0{,}25\ X_{31} \geq 0$

$0{,}60\ X_{31} - 0{,}40\ X_{11} - 0{,}40\ X_{21} \geq 0$

$0{,}70\ X_{12} - 0{,}30\ X_{22} - 0{,}30\ X_{32} \geq 0$

$0{,}80\ X_{22} - 0{,}20\ X_{12} - 0{,}20\ X_{32} \geq 0$

$0{,}70\ X_{22} - 0{,}30\ X_{12} - 0{,}30\ X_{32} \geq 0$

$0{,}85\ X_{32} - 0{,}15\ X_{22} - 0{,}15\ X_{12} \geq 0$

$0{,}65\ X_{23} - 0{,}35\ X_{13} - 0{,}35\ X_{33} \geq 0$

No negatividad

$X_{12}, X_{22}, X_{23}, X_{32}, X_{33}, X_{11}, X_{13}, X_{21}, X_{31} \geq 0$

Elaboración de raciones para vacas lecheras:

Partimos de una ración hipotética donde intervienen los siguientes datos:

Un concentrado (al que llamaremos X) y un forraje forraje (Y)

Se considerarán tres nutrientes.

Proteína Cruda (PC)

Energía Neta de lactancia (ENI)

Fibra Cruda (FC)

El precio por kilogramo y la composición nutritiva de cada uno de los alimentos.

Alimentos	Variables	PC (g)	ENI (Mcal)	FC (g)	Precio ($)
Concentrado	X	120	2.0	100	100
Forraje	Y	200	1.3	280	50

Y las necesidades nutritivas de las vacas lecheras son datos indispensables para el problema.

	PC (g)	ENI (Mcal)	FC (g)
Máximo			2000
Mínimo	1500	16.5	1300

El objetivo es lograr una ración de mínimo costo.

Modelo de P.L:

Minimiza C = 110 X + 50 Y

La solución del problema pasa necesariamente por cubrir las necesidades nutricionales de las vacas lecheras. Para esto se busca que las cantidades de cada alimento, multiplicadas por su contenido nutritivo, cubran el mínimo necesario de proteína cruda, de energía neta y de fibra cruda, a la vez que no superen el máximo de fibra establecido para una ración. Estas restricciones se expresan de la siguiente forma:

$120 X + 200 Y \geq 1.500$

$2,0 X + 1,3 Y \geq 16,5$

$100 X + 280 Y \leq 2.000$

$100 X + 280 Y \geq 1.300$

Y al final incorporamos la restricción lógica o de no negatividad.

Comentario:

De esta forma podemos ver, que mediante la programación lineal se determinan, por ejemplo, cálculos de raciones alimenticias de mínimo costo y que cumplan con los requerimientos nutricionales que los animales requieren. Para ello se deberá disponer a lo menos de la siguiente información:

Requerimientos nutricionales del tipo de animal a alimentar

Alimentos que se encuentran disponibles.

Precios por kilo de los alimentos.

Composición nutricional de los alimentos

Cantidad de animales en el predio.

Período de alimentación.

En el caso de la utilización de forrajes, se puede realizar programación lineal para minimizar costos o maximizar beneficios; maximizar la producción de carne o leche o maximizar la carga animal. Para ello se requiere conocer a lo menos:

• Recursos forrajeros disponibles y su superficie.

• Producción de carne o leche.

• Carga animal.

• Prácticas agronómicas realizadas.

• Mano de obra utilizada o disponible.

• Costos.

• Utilidades.

Otra utilización común de la programación lineal es en la optimización de cultivos utilizando como criterios el mínimo costo, el máximo beneficio o la máxima producción. Para ello se requiere conocer:

• Listado de cultivos.

• Superficie total a cultivar.

• Producción de los cultivos.

• Insumos utilizados.

• Mano de obra disponible y utilizada por cultivo.

Costos por cultivo.

• Beneficio por cultivo

Manejo Forestal

Los esquemas de toma de decisiones, que busquen un equilibrio entre lo económico, ambiental, social y cultural del manejo de los recursos forestales, han hecho necesario el uso de técnicas cuantitativas para el diseño de planes de manejo que permitan optimizar objetivos bajo una serie de restricciones.

Un consultor forestal visitó a un pequeño propietario de tierras y regresó con la información que describe su situación con respecto al manejo que realiza de la misma. Se trata de un granjero estadounidense de tiempo parcial que posee 24 hectáreas disponibles

y quiere usarla para incrementar sus ingresos. Las alternativas de destino de la tierra que se le presentan son dos: trasplantar árboles de Navidad híbridos de rápido crecimiento que maduran en un año, o bien engordar novillos poniendo la superficie a pasturas. Los árboles de Navidad se plantan y se venden en lotes de 1.000 unidades. Para desarrollar un lote de 1.000 árboles se necesitan 1,5 has y engordar 1 novillo requiere 4 has. Además, el granjero dispone sólo de 200 horas al año para dedicarle a esta actividad. La experiencia muestra que se necesitan 20 horas para cultivar, podar, cosechar y empaquetar un lote de árboles. Por otro lado, se requieren 20 horas para atender cada novillo. Este productor tiene $ 1.200 de presupuesto disponible; sus gastos anuales son de $ 30 por cada lote de árboles y $ 240 por novillo. Además, ya tiene realizado un contrato con sus vecinos por 2 novillos. En precios corrientes, los árboles de Navidad le darán un retorno líquido de $ 0,50 cada uno, en tanto que cada novillo le redituarán $ 1.000. Efectuado el levantamiento de datos, el consultor decide que un planteo matemático del problema, en términos de objetivos y restricciones, podrá ayudar al productor a tomar la decisión.

Objetivo: aumentar los ingresos del productor: maximizar su margen líquido

Actividades posibles:

A_1 = criar y engordar novillos

A_2 = cultivar árboles de Navidad

Definición de variables:

X_1 = número de novillos engordados por año

X_2 = número de lotes de 1.000 árboles por año

Función Objetivo**:**

Z máx = 1.000 X_1 + 500 X_2

($/año) = ($/novillo)* (novillos/año) + ($/novillo)* (novillos/año)

Siendo: $ 1.000: margen líquido por novillo (c_1)

$ 500: margen líquido por lote de árboles (c_2)

Restricciones:

De Tierra:

24 has disponibles (b_1)

4 has por novillo (a_{11})

1,5 has por lote de árboles (a_{12})

$4 X_1 + 1,5 X_2 \leq 24$

Presupuesto:

$ 1.200 disponibles (b_2)

$ 240 por novillo (a_{21})

$ 30 por lote de árboles (a_{22})

$240 X_1 + 30 X_2 \leq 1.200$

Mano de Obra:

200 horas disponibles (b_3)

20 horas por novillo (a_{31})

20 horas por lote de árboles (a_{32})

$20 X_1 + 20 X_2 \leq 200$

Contrato: por lo menos 2 novillos (b_4) deben producirse para cumplir el contrato previo.

$X_1 \geq 2$

No Negatividad: todas las actividades deben ser positivas: $X_1 \geq 0$ y $X_2 \geq 0$

Una pequeña fábrica de pasta de madera produce pulpa mecánica y pulpa química en un pueblo cerca de un río. Las técnicas de producción usadas en la fábrica son tales que: a) cada tipo de pasta requiere 1 hombre-día por tonelada producida y b) la capacidad máxima de producción es 300 tn/día para la pasta mecánica y 200 tn/día para la pasta química.

La producción de pulpa contamina el agua del río. La contaminación se mide en términos de materiales biodegradables tal como la Demanda Biológica de Oxígeno (BOD). La pulpa mecánica genera 1 BOD por tonelada producida mientras que la producción de pulpa química produce 1,5 BOD por tonelada. El precio de mercado de la pasta mecánica es de 100 $/tn y de la pasta química es de 200 $/tn. El directorio de la empresa ha formulado las siguientes políticas operativas:

1. La fábrica debe generar, por lo menos, un ingreso bruto promedio de 40.000 $/día. Nótese que no hay deseo de maximizar ingresos, pero sí, generar el suficiente como para obtener un aceptable retorno sobre el capital.

2. La fábrica desea retener por lo menos 300 trabajadores empleados. Es una fábrica local pequeña, de modo que el gerente es muy consciente de su imagen en la comunidad.

3. La contaminación con BOD debe minimizarse.

Objetivo: minimizar la contaminación Actividades productivas que contaminan:

A_1 = producción de pasta mecánica

A_2 = producción de pasta química

Definición de variables:

X_1 = cantidad producida de pasta mecánica (tn/día)

X_2 = cantidad producida de pasta química (tn/día)

Función Objetivo:

Z mín = $1X_1 + 1{,}5X_2$

(BOD/día) = (BOD/tn) * (tn/día) + (BOD/tn) * (tn/día)

Siendo:

1 BOD/día: nivel de contaminación de la pasta mecánica (c_1)

1,5 BOD/día: nivel de contaminación de la pasta química (c_2)

Restricciones:

Mano de Obra.

300 o más trabajadores (b_1)

1 hombre-día por tn de pasta mecánica producida (a_{11})

1 hombre-día por tn de pasta química producida (a_{12})

$1X_1 + 1X_2 \geq 300$

Ingreso Bruto:

$ 40.000 o más (b_2)

$ 100 precio de mercado de la pasta mecánica (a_{21})

$ 200 precio de mercado de la pasta química (a_{22})

$100 X_1 + 200 X_2 \geq 40.000$

Capacidad Productiva:

300 tn/día de pasta mecánica (b_3)

200 tn/día de pasta química (b_4)

$X_1 \leq 300$ y $X_2 \leq 200$

No Negatividad: todas las actividades deben ser positivas: $X_1 \geq 0$ y $X_2 \geq 0$

Planeación de la fuerza de trabajo

El uso de modelos de programación lineal para la planeación y programación de la producción en el sector de los servicios se hizo muy necesario, considerando las características, medidas de desempeño y objetivos a considerar. Esto lo hace ideal para esta área en particular, donde se deben considerar una serie de restricciones, que conlleven a optimizar los rendimientos y costos de producir.

El gerente de personal de “Improro, S.A”, está analizando la necesidad de mano de obra semicualificada durante los próximos seis meses. Se lleva 1 mes adiestrar a una persona nueva. Durante este período de entrenamiento un trabajador regular, junto con uno en adiestramiento (aprendiz), producen el equivalente a lo que producen 1.2 trabajadores regulares. Se paga $500.00 mensuales a quien está en entrenamiento, mientras que los trabajadores regulares

ganan $800.00 mensuales. La rotación de personal entre los trabajadores regulares es bastante alta, del 10% mensual.

El gerente de personal debe decidir cuántas personas necesita contratar cada mes para adiestramiento. En seguida se da el número de meses-hombre necesarios. También se desea tener una fuerza de trabajo regular de 110 al principio de julio. En cuanto al 1º de enero, hay 58 empleados regulares.

Mes	Meses-hombre requeridos	Mes	Meses-hombre requeridos
enero	60	abril	80
febrero	50	mayo	70
marzo	60	junio	100

Este problema tiene un aspecto dinámico, ya que la fuerza de trabajo en cualquier mes depende de la fuerza de trabajo regular y en adiestramiento del mes anterior. Para cualquier mes, el número total de meses-hombre disponibles se puede expresar como sigue:

Meses-hombre disponibles: $R_i + 0.2A_i$ en donde:

R_i = número de trabajadores regulares al principio del mes

A_i = número de aprendices contratados en el mes.

Entonces los requerimientos de cada mes pueden expresarse por las restricciones:

Enero: $R_1 + 0.2A_1 \geq 60$

Febrero: $R_2 + 0.2A_2 \geq 50$

Marzo: $R_3 + 0.2A_3 \geq 60$

Abril: $R_4 + 0.2A_4 \geq 80$

Mayo: $R_5 + 0.2A_5 \geq 70$

Junio: $R_6 + 0.2A_6 \geq 100$

Julio (principio) $R_7 \geq 110$

Debido a la rotación, el 10% de los trabajadores regulares se van cada mes. Así, el número de trabajadores regulares disponibles, por ejemplo, al principio de febrero sería:

$R_2 = 0.9R_1 + A_1$

En la misma forma, pueden escribirse las ecuaciones para el número de trabajadores disponibles al principio de cada mes:

Enero: $R_1 = 58$ (dado)

Febrero: $R_2 = 0.9R_1 + A_1$

Marzo: $R_3 = 0.9R_2 + A_2$

Abril: $R_4 = 0.9R_3 + A_3$

Mayo: $R_5 = 0.9R_4 + A_4$

Junio: $R_6 = 0.9R_5 + A_5$

Julio: $R_7 = 0.9R_6 + A_6$

El objetivo global del gerente de personal es minimizar el costo. La función objetivo es:

Minimizar: $Z = 800(R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6) + 500(A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6)$

Ahora se tiene el problema en el formato general de PL con 13 variables y 14 restricciones.

Los tomadores de decisiones en las empresas establecen criterios que debe cumplir una solución y, después, buscan esa solución. En PL, los criterios se expresan como restricciones. Se exploran las soluciones posibles y se usa la función objetivo para elegir la mejor

de entre aquellas que cumplen con los criterios. La PL se denomina técnica de optimización, pero optimiza sólo dentro de los límites de las restricciones. En realidad, es un método de satisfacción de criterios.

Inversión

Los problemas de inversión, son la asignación de presupuestos de capital para proyectos, estrategia de inversión en bonos, selección de cartera de acciones, y establecimiento de una política de préstamos bancarios. En muchas de estas situaciones, la Programación Lineal puede usarse para seleccionar la combinación óptima de oportunidades que maximizarán el rendimiento, al mismo tiempo que se satisfacen los requerimientos establecidos por el inversionista y el mercado.

Modelo de préstamo bancario: Banco de Machala está desarrollando una política de préstamos que implica un máximo de $12 millones. La tabla siguiente muestra los datos pertinentes en relación con los préstamos disponibles.

Tipo de préstamo	Tasa de interés	% de deudas impagables
Personal	0.14	0.10
Automóvil	0.13	0.07
Casa	0.12	0.03
Agrícola	0.125	0.05
Comercial	0.10	0.02

Las deudas impagables son irrecuperables y no producen ingresos por intereses.

La competencia con otras instituciones financieras dicta la asignación de 40% mínimo de los fondos para préstamos agrícolas y comerciales.

Para ayudar a la industria de la construcción de viviendas en la región, los préstamos para casa deben ser por lo menos 50% de los préstamos personales, para automóvil, y para casa.

El banco limita la proporción total de las deudas impagables en todos los préstamos a un máximo de 4%.

Solución:

La situación se refiere a determinar el monto del préstamo en cada categoría, lo que conduce a las siguientes definiciones de las variables:

x_1 = préstamos personales (en millones de dólares)

x_2 = préstamos para automóvil

x_3 = préstamos para casa

x_4 = préstamos agrícolas

x_5 = préstamos comerciales

El objetivo del Banco de Machala es maximizar el rendimiento neto, la diferencia entre el ingreso por intereses y la pérdida por deudas impagables. El ingreso por intereses se acumula sobre los préstamos al corriente. Por ejemplo, cuando se pierde 10% de préstamos personales por deuda impagable, el banco recibirá intereses sobre 90% del préstamo; es decir, recibirá un interés de 14% sobre $0.9x_1$ del préstamo original x_1.El razonamiento es válido para los cuatro tipos restantes de préstamos. Por lo tanto,

Interés total = $0.14(0.9x_1) + 0.13(0.93x_2) + 0.12(0.97x_3) + 0.125(0.95x_4) + 0.1(0.98x5)$

Interés total = $0.126x_1 + 0.1209x_2 + 0.1164x_3 + 0.11875x_4 + 0.098x_5$

También tenemos:

Deuda impagable = $0.10x_1 + 0.07x_2 + 0.03x_3 + 0.05x_4 + 0.02x_5$

La función objetivo combina el ingreso por intereses y la deuda impagable como sigue

Maximizar z = Interés total – Deuda impagable

Maximizar z = $(0.126x_1 + 0.1209x2 + .1164x3 + .11875x4 + .098x5)$ - $(0.1x_1 + 0.07x_2 + 0.03x_3 + 0.05x_4 + 0.02x_5)$

Maximizar z = $0.026x_1 + 0.0509x_2 + 0.0864x_3 + 0.06875x_4 + 0.078x_5$

El problema tiene cinco restricciones:

1. Los fondos totales no deben exceder de $12 (millones):

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 12$

2. Los préstamos agrícolas y comerciales deben ser iguales a por lo menos el 40% de todos los préstamos:

$x_4 + x_5 \geq 0.4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$, resolvemos las operaciones: $0.4x_1 + 0.4x_2 + 0.4x_3 - 0.6x_4 - 0.6x_5 \leq 0$

3. Los préstamos para casa deben ser iguales a por lo menos 50% de los préstamos personales, para automóvil y para casa:

$x_3 \geq 0.5(x_1 + x_2 + x_3)$, resolvemos las operaciones: $0.5x_1 + 0.5x_2 - 0.5x_3 \leq 0$

4. Las deudas impagables no deben exceder 4% de todos los préstamos:

$0.1x_1 + 0.07x_2 + 0.03x_3 + 0.05x_4 + 0.02x_5 \leq 0.04(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$

resolviendo: $0.06x_1 + 0.03x_2 - 0.01x_3 + 0.01x_4 - 0.02x_5 \leq 0$

No negatividad:

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Modelo matemático:

Maximizar $z = 0.026x_1 + 0.0509x_2 + 0.0864x_3 + 0.06875x_4 + 0.078x_5$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 12$

$0.4x_1 + 0.4x_2 + 0.4x_3 - 0.6x_4 - 0.6x_5 \leq 0$

$0.5x_1 + 0.5x_2 - 0.5x_3 \leq 0$

$0.06x_1 + 0.03x_2 - 0.01x_3 + 0.01x_4 - 0.02x_5 \leq 0$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

La solución óptima se calcula utilizando Solver de Excel:

$z = 0.99648$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 7.2$, $x_4 = 0$, $x_5 = 4.8$

La solución óptima requiere que se asignen los $12 millones: $7.2 millones a préstamos para casa, y $4.8 millones a préstamos comerciales. Las categorías restantes no reciben nada. El rendimiento de la inversión es:

$$Tasa\ de\ rendimiento = \frac{0.99648}{12} = 0.08034 = 8.034\%$$

La cooperativa agraria “La lucha” tiene dos proyectos de inversión. El proyecto 1 tiene que ver con un producto a base de moringa, y el proyecto 2 a base de banano. Esta cooperativa tiene dificultades de capital, lo cual obliga a un manejo cuidadoso de este recurso escaso. Los proyectos tienen los siguientes flujos de dinero por unidad fabricada. La fabricación de cualquiera de los productos se demora un mes, y la venta se produce un mes después de su fabricación. En el caso del producto 2, el costo total de fabricación es de $200 por unidad, de los cuales $100 se deben pagar de inmediato, para comprar la materia prima, y los restantes $100 al final del mes. En

el caso del producto 2 se debe pagar $25 de inmediato y $100 al final de mes. La cooperativa usa una tasa de interés de oportunidad de 2% mensual.

En el momento solo dispone de $2.400, y dentro de un mes sólo dispondrá de $4.000. Además, el dinero que no se gaste de inmediato no podrá guardarse para dentro de un mes. Porque el Auditor de la Cooperativa exige que se paguen otros compromisos que no dan espera. El precio de venta es de $362.09 y $190.43 para los productos de 1 y 2 respectivamente. Con base en esta información resuelva los siguientes puntos:

Formule el modelo de programación lineal

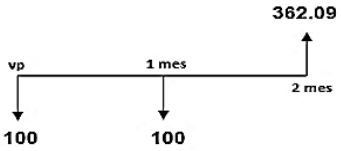
Halle la solución utilizando el método gráfico.

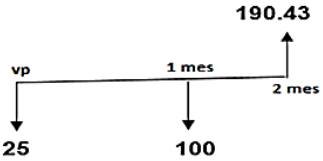
Definición de variables

X_1 = Cantidad de productos a base de moringa

X_2 = cantidad de productos a base de banano

Calculo del valor neto presente de los flujos de dinero:





Cálculos para los productos en base a moringa

$$VP = \frac{Vf}{(1+i)^n}$$

$$VP = -100 - \frac{100}{(1+0{,}02)^1} + \frac{362{,}09}{(1+0{,}02)^2}$$

$$= -100 - 98{,}04 + 348{,}02 = \$\,150$$

Cálculos para los productos a base de banano

$$VP = \frac{Vf}{(1+i)^n}$$

$$VP = -25 - \frac{100}{(1+0{,}02)^1} + \frac{190{,}43}{(1+0{,}02)^2}$$

$$= -25 - 98{,}04 + 183{,}03 = \$\,60$$

Modelo Matemático:

Maximizar $Z = 150\ X_1 + 60\ X_2$

Sujeta a:

$100\ X_1 + 25\ X_2 \leq 2400$

$100\ X_1 + 100\ X_2 \leq 4000$

$X_1\ ,\ X_2 \geq 0$

Otras aplicaciones

Modelo de programación lineal para formula de abono orgánico a base de desechos de vegetales frescos como fertilizante para el cultivo de limón, es uno entre tantos ejemplos del potencial del uso de la programación lineal en el sector agropecuario.

Se desea elaborar un abono orgánico que consiste en la combinación de 10 desechos de vegetales frescos con los cuales se obtenga un fertilizante, estos productos a utilizarse son: acelgas, ajo, brócoli, C¡col, Coliflor, Espinacas, Lechuga, Nabo, Pepino y Tomate.

Aportes nutricionales de desechos vegetales:

Sabemos que por cada 100g de Acelgas (sin cocinar) nos proporciona: 3,30 mg. de hierro, 1,88 g. de proteínas, 105 mg. de calcio, 1,20 g. de fibra, 380 mg. de potasio, 0,03 mg. de zinc, 4,50 g. de carbohidratos, 76 mg. de magnesio, 150 mg. de sodio, 335,17 ug. de vitamina A, 0,05 mg. de vitamina B1, 0,05 mg. de vitamina B2, 1,05 mg. de vitamina B3, 0,17 ug. de vitamina B5, 0,11 mg. de vitamina B6, 0 ug. de vitamina B7, 0 ug. de vitamina B12, 18,90 mg. de vitamina C, 0 ug. de vitamina D, 0,03 mg. de vitamina E, 40 mg. de fósforo, 29,70 kcal. de calorías, 0 mg. de colesterol, 0,20 g. de grasa, 1,02 g. de azúcar y 0 mg. de purinas.

Por cada 100g de Ajo (sin cocinar) nos proporciona: 1,20 mg. de hierro, 4,30 g. de proteínas, 17,80 mg. de calcio, 1,20 g. de fibra, 446 mg. de potasio, 4,70 mg. de yodo, 1,10 mg. de zinc, 24,30 g. de carbohidratos, 24,10 mg. de magnesio, 19 mg. de sodio, trazas de vitamina A, 0,16 mg. de vitamina B1, 0,02 mg. de vitamina B2, 1,02 mg. de vitamina B3, 0,60 ug. de vitamina B5, 0,32 mg. de vitamina B6, 0 ug. de vitamina B7, 4,80 ug. de vitamina B9, 0 ug. de vitamina B12, 14 mg. de vitamina C, 0 ug. de vitamina D, 0,01 mg. de vitamina E, 1,40 ug. de vitamina K, 134 mg. de fósforo, 119 kcal. de calorías, 0 mg. de colesterol, 0,23 g. de grasa, 2,21 g. de azúcar y 0 mg. de purinas.

Por cada 100g de Brócoli (sin cocinar) nos proporciona: 0,86 mg. de hierro, 3,56 g. de proteínas, 58 mg. de calcio, 3 g. de fibra, 279 mg. de potasio, 15 mg. de yodo, 0,49 mg. de zinc, 2,66 g. de carbohidratos, 19 mg. de magnesio, 22 mg. de sodio, 143,80 ug. de vitamina A, 0,09 mg. de vitamina B1, 0,18 mg. de vitamina B2, 1,52 mg. de vitamina B3, 0,90 ug. de vitamina B5, 0,28 mg. de vitamina B6, 0,50 ug. de vitamina B7, 0 ug. de vitamina B12, 0 ug. de vitamina D, 0,62 mg. de vitamina E, 65 mg. de fósforo, 33 kcal. de calorías, 0 mg. de colesterol, 0,20 g. de grasa, 2,66 g. de azúcar y 81 mg. de purinas.

Por cada 100g de Col (sin cocinar) nos proporciona: 0,41 mg. de hierro, 1,38 g. de proteínas, 45 mg. de calcio, 2,96 g. de fibra, 255 mg. de potasio, 3 mg. de yodo, 0,22 mg. de zinc, 4,18 g. de carbohidratos, 14 mg. de magnesio, 12 mg. de sodio, 12 ug. de vitamina A, 0,04 mg. de vitamina B1, 0,05 mg. de vitamina B2, 0,73 mg. de vitamina B3, 0,21 ug. de vitamina B5, 0,19 mg. de vitamina B6, 3,10 ug. de vitamina B7, 31 ug. de vitamina B9, 0 ug. de vitamina B12, 48 mg. de vitamina C, 0 ug. de vitamina D, 1,70 mg. de vitamina E, 36 mg. de fósforo, 30,20 kcal. de calorías, 0 mg. de colesterol, 0,20 g. de grasa, 4,14 g. de azúcar y 22 mg. de purinas.

Por cada 100g de Coliflor (sin cocinar) nos proporciona: 0,84 mg. de hierro, 2,44 g. de proteínas, 19,26 mg. de calcio, 2,92 g. de fibra, 296 mg. de potasio, 5,92 mg. de yodo, 0,32 mg. de zinc, 2,39 g. de carbohidratos, 15,92 mg. de magnesio, 13 mg. de sodio, 7,01 ug. de vitamina A, 0,09 mg. de vitamina B1, 0,09 mg. de vitamina B2, 1,27 mg. de vitamina B3, 0,60 ug. de vitamina B5, 0,24 mg. de vitamina B6, 1,50 ug. de vitamina B7, 72,51 ug. de vitamina B9, 0 ug. de vitamina B12, 0 ug. de vitamina D, 0,21 mg. de vitamina E, 52 mg. de fósforo, 27,52 kcal. de calorías, 0 mg. de colesterol, 0,28 g. de grasa, 2,05 g. de azúcar y 51 mg. de purinas.

Por cada 100g de Espinacas (sin cocinar) nos proporciona: 2,70 mg. de hierro, 2,63 g. de proteínas, 117 mg. de calcio, 2,58 g. de fibra, 554 mg. de potasio, 12 mg. de yodo, 0,60 mg. de zinc, 0,61 g. de carbohidratos, 60 mg. de magnesio, 69 mg. de sodio, 0,09 mg. de vitamina B1, 0,20 mg. de vitamina B2, 1,38 mg. de vitamina B3, 0,25 ug. de vitamina B5, 0,22 mg. de vitamina B6, 6,90 ug. de vitamina B7, 0 ug. de vitamina B12, 40 mg. de vitamina C, 0 ug. de vitamina D, 1,40 mg. de vitamina E, 46 mg. de fósforo, 0 mg. de colesterol, 0,30 g. de grasa, 0,47 g. de azúcar y 57 mg. de purinas.

Por cada 100g de Lechuga (sin cocinar) nos proporciona: 1 mg. de hierro, 1,37 g. de proteínas, 34,70 mg. de calcio, 1,50 g. de fibra, 220 mg. de potasio, 3 mg. de yodo, 0,23 mg. de zinc, 1,40 g. de carbohidratos, 8,70 mg. de magnesio, 3 mg. de sodio, 187 ug. de vitamina A, 0,06 mg. de vitamina B1, 0,07 mg. de vitamina B2, 0,80 mg. de vitamina B3, 0,11 ug. de vitamina B5, 0,06 mg. de vitamina B6, 1,90 ug. de vitamina B7, 33,60 ug. de vitamina B9, 0 ug. de vitamina B12, 13 mg. de vitamina C, 0 ug. de vitamina D, 0,60 mg. de vitamina E, 28 mg. de fósforo, 0 mg. de colesterol, 0,60 g. de grasa, 1,36 g. de azúcar y 13 mg. de purinas.

Por cada 100g de Nabo (sin cocinar) nos proporciona: 0,38 mg. de hierro, 1 g. de proteínas, 45 mg. de calcio, 3,49 g. de fibra, 269 mg.

de potasio, 2 mg. de yodo, 0,23 mg. de zinc, 4,66 g. de carbohidratos, 14 mg. de magnesio, 58 mg. de sodio, 0 ug. de vitamina A, 0,04 mg. de vitamina B1, 0,05 mg. de vitamina B2, 0,68 mg. de vitamina B3, 0,20 ug. de vitamina B5, 0,08 mg. de vitamina B6, 2 ug. de vitamina B7, 20 ug. de vitamina B9, 0 ug. de vitamina B12, 20 mg. de vitamina C, 0 ug. de vitamina D, trazas de vitamina E, 0,10 ug. de vitamina K, 41 mg. de fósforo, 31,60 kcal. de calorías, 0 mg. de colesterol, 0,22 g. de grasa, 3,97 g. de azúcar y 0 mg. de purinas.

Por cada 100g de Pepino (sin cocinar) nos proporciona: 0,20 mg. de hierro, 0,63 g. de proteínas, 18,45 mg. de calcio, 0,70 g. de fibra, 140 mg. de potasio, 0,30 mg. de yodo, 0,14 mg. de zinc, 1,90 g. de carbohidratos, 7,30 mg. de magnesio, 3 mg. de sodio, 28,17 ug. de vitamina A, 0,04 mg. de vitamina B1, 0,03 mg. de vitamina B2, 0,36 mg. de vitamina B3, 0,26 ug. de vitamina B5, 0,04 mg. de vitamina B6, 0,90 ug. de vitamina B7, 19,40 ug. de vitamina B9, 0 ug. de vitamina B12, 7 mg. de vitamina C, 0 ug. de vitamina D, 0,39 mg. de vitamina E, 13 ug. de vitamina K, 23 mg. de fósforo, 0 mg. de colesterol, 0,20 g. de grasa, 1,80 g. de azúcar y 7,30 mg. de purinas.

Por cada 100 de Tomate (sin cocinar) nos proporciona: 0,70 mg. de hierro, 0,88 g. de proteínas, 10,60 mg. de calcio, 1,40 g. de fibra, 242 mg. de potasio, 2,20 mg. de yodo, 0,16 mg. de zinc, 3,50 g. de carbohidratos, 8,30 mg. de magnesio, 9 mg. de sodio, 217 ug. de vitamina A, 0,07 mg. de vitamina B1, 0,04 mg. de vitamina B2, 0,90 mg. de vitamina B3, 0,28 ug. de vitamina B5, 0,13 mg. de vitamina B6, 1,50 ug. de vitamina B7, 28,80 ug. de vitamina B9, 0 ug. de vitamina B12, 26,60 mg. de vitamina C, 0 ug. de vitamina D, 0,89 mg. de vitamina E, 5,70 ug. de vitamina K, 24 mg. de fósforo, 0 mg. de colesterol, 0,21 g. de grasa, 3,39 g. de azúcar y 0 mg. de purinas.

Necesidades nutricionales de la planta de limón:

Es necesario tener en cuenta, que existe una cantidad de nutrientes en el suelo accesible para la planta, los cuales se reportan en el análisis de suelo, este es el punto de partida para decidir la cantidad de nutrientes que aplicaremos por fertilización. El limón necesita de 15 elementos para su buen desarrollo, que son:

Carbono (C), Hidrógeno (H), Oxígeno (O), Nitrógeno (N), Fósforo (P), Potasio (K), Calcio (Ca), Magnesio (Mg), Azufre (S), Zinc (Zn), Boro (B), Hierro (Fe), Manganeso (Mn), Cobre (Cu) y Molibdeno (Mo). Los primeros tres los obtiene del aire y del agua y los restantes 12 del suelo por la raíz, los que pueden llegar a agotarse si no se consideran en un adecuado sistema de fertilización.

Los más importantes para su producción son Nitrógeno, Fósforo y Potasio.

Así como es deficiente de elementos no menos importantes como magnesio y zinc. Estos elementos se los puede suministrar a la planta por medio de fertilizantes químicos u orgánicos.

Modelo Matemática de P.L:

X_1 = Número de gramos de acelga

X_2 = Número de gramos de ajo

X_3 = Número de gramos de brócoli

X_4 = Número de gramos de col

X_5 = Número de gramos de coliflor

X_6 = Número de gramos de espinacas

X_7 = Número de gramos de lechuga

X_8 = Número de gramos de nabo

X_9 = Número de gramos de pepino

X_{10} = Número de gramos de tomate

Función objetivo: Costo = $0.50\ X_1 + 0.30\ X_2 + 0.50\ X_3 + 0.35\ X_4 + 0.50X_5 + 0.55\ X_6 + 0.60\ X_7 + 0.55\ X_8 + 0.25\ X_9 + 0.40\ X_{10}$

Restricciones:

Cantidad de producto a producir: $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10}$

Calcio: $0{,}105X_1 + 0{,}0178X_2 + 0{,}058X_3 + 0{,}045X_4 + 0{,}01926X_5 + 0{,}117\ X_6 + 0{,}0347X_7 + 0{,}045X_8 + 0{,}01845X_9 + 0{,}0106X_{10} \leq 1{,}6$

Hierro: $0{,}00037X_1 + 0{,}0012X_2 + 0{,}00086X_3 + 0{,}000041X_4 + 0{,}00084\ X_5 + 0{,}0027\ X_6 + 0{,}001X_7 + 0{,}00038X_8 + 0{,}0002X_9 + 0{,}007X_{10} \leq 35$

Magnesio: $0{,}076X_1 + 0{,}0241X_2 + 0{,}019X_3 + 0{,}014X_4 + 0{,}0159X_5 + 0{,}060X_6 + 0{,}0087X_7 + 0{,}014X_8 + 0{,}0073X_9 + 0{,}0083X_{10} \leq 0{,}15$

Fósforo: $0{,}04X_1 + 0{,}134X_2 + 0{,}065X_3 + 0{,}162X_4 + 0{,}052\ X_5 + 0{,}046X_6 + 0{,}028X_7 + 0{,}041X_8 + 0{,}023\ X_9 + 0{,}024X_{10} \leq 0{,}1$

Potasio: $0{,}38X_1 + 0{,}446X_2 + 0{,}279X_3 + 0{,}451\ X_4 + 0{,}296X_5 + 0{,}554X_6 + 0{,}22\ X_7 + 0{,}269\ X_8 + 0{,}14\ X_9 + 0{,}242\ X_{10} \leq 0{,}5$

Manganeso: $0{,}00037X_1 + 0{,}00023\ X_2 + 0{,}021X_3 + 0{,}005X_4 + 0{,}013X_5 + 0{,}016X_6 + 0{,}179X_7 + 0{,}11X_8 + 0{,}079X_9 + 0{,}114X_{10} \leq 12$

Zinc: $0{,}00X_1 + 0{,}0011X_2 + 0{,}00049X_3 + 0{,}00022X_4 + 0{,}00032X_5 + 0{,}0006\ X_6 + 0{,}00023X_7 + 0{,}00023X_8 + 0{,}00014X_9 + 0{,}00016X_{10}$

UNIDAD III. SOLUCIÓN GRAFICA DE MODELOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

Una vez que se ha formulado el modelo matemático de un problema, se hace necesario resolver el mismo aplicado los diferentes métodos que existen para el efecto; dependiendo del número de variables, si este no posee más de dos variables, el método recomendado es el grafico.

Método Grafico

El método gráfico, para resolver un programa lineal con dos variables, se comprende mejor concentrándose primero en las restricciones y posteriormente en la función objetivo.

El método sigue el siguiente proceso:

- Dibuje un eje con las dos variables como abscisa y ordenada.

- Grafique las restricciones e identifique el área que cubra a todas ellas.

- Trazar la línea de función objetivo a partir de un punto inicial asumido (x_1, x_2) que este en el área de las restricciones, y en forma paralela grafico otras líneas hasta encontrar la solución óptima (La solución óptima se encuentra en uno de los puntos extremos).

- La solución de las variables se obtiene leyendo directamente de la gráfica, aunque, una forma más exacta es resolviendo las ecuaciones de las restricciones que cruzan por el punto óptimo encontrado.

Para explicar el proceso a seguir, usaremos el siguiente ejemplo:

Maximizar el siguiente modelo

Maximizar $U = 3X_1 + 5X_2$

Restricciones:

$1.5X_1 + 1X_2 \leq 9$

$X_1 + 2X_2 \leq 10$

$-X_1 + X_2 \leq 1$

$X_1 \quad \geq 2$

$X_2 \geq 2$

$X_1, X_2 \geq 0$

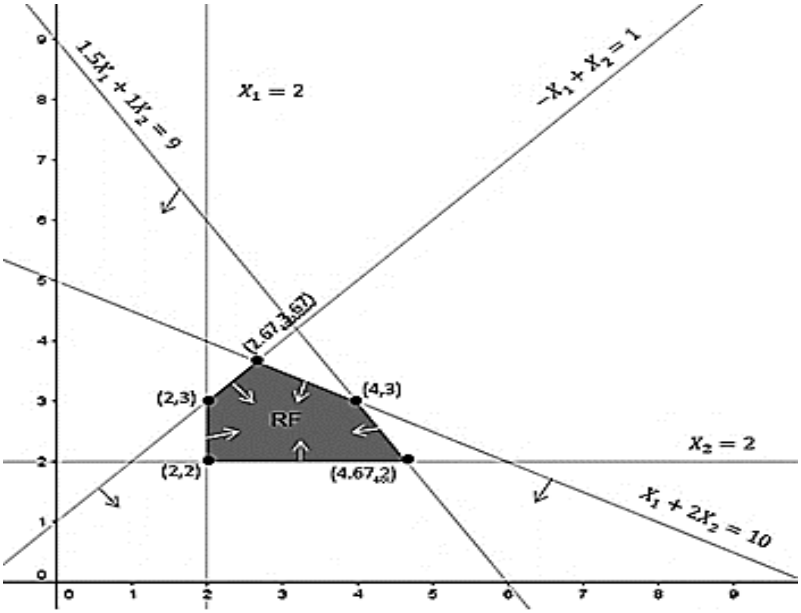
Primero, determinamos los puntos de intersección, para lo cual transformamos las inecuaciones en ecuaciones:

$1.5X_1 + 1X_2 = 9$		
$X_1 = 0$	$X_2 = 9$	(0, 9)
$X_2 = 0$	$X_1 = 6$	(6, 0)
$X_1 + 2X_2 = 10$		
$X_1 = 0$	$X_2 = 5$	(0, 5)
$X_2 = 0$	$X_1 = 10$	(10, 0)
$-X_1 + X_2 = 1$		
$X_1 = 0$	$X_2 = 1$	(0, 1)
$X_2 = 0$	$X_1 = -1$	(-1, 0)

Segundo, graficamos cada ecuación y definimos la zona solución tomando un punto de prueba (usualmente P (0, 0)), sombreando la zona donde la desigualdad es verdadera.

$1.5X_1 + 1X_2 \leq 9$	$1.5(0) + 1(0) \leq 9$	Verdadero	Se sombrea el lado del punto de prueba
$X_1 + 2X_2 \leq 10$	$0 + 2(0) \leq 10$	Verdadero	Se sombrea el lado del punto de prueba
$-X_1 + X_2 \leq 1$	$-0 + 0 \leq 1$	Verdadero	Se sombrea el lado del punto de prueba
$X_2 \geq 2$			Hacia arriba de la recta vertical $x_2 = 2$
$X_1 \geq 0$			A la derecha de la recta vertical $x_1 = 0$
$X_1 \geq 0$	Es redundante con $x_2 \geq 2$		Se puede omitir

Grafico:



Tercero, en el grafico donde coinciden los sombreados de todas las desigualdades se define una zona que la denominamos región factible. De este polígono determinamos sus vértices, resolviendo los sistemas de ecuaciones que dan lugar a la intersección respectiva.

Formamos sistemas y resolvemos:

Primer sistema:

$$1.5X_1 + X_2 = 9$$
$$X_2 = 2$$

$$1.5X_1 + (2) = 9$$
$$1.5X_1 = 9 - 2$$
$$1.5X_1 = 7$$
$$X_1 = \frac{7}{1.5} = 4.67$$

V_5 (4.67, 2)

Segundo sistema:

$$-X_1 + X_2 = 1$$
$$X_1 + 2X_2 = 10$$
$$3X_2 = 11$$
$$X_2 = \frac{11}{3} = 3.67$$
$$X_1 + 2(3.67) = 10$$
$$X_1 = 10 - 7.33$$
$$X_1 = 2.67$$

V_3 (2.67, 3.67)

Tercer sistema:

$$X_1 + 2X_2 = 10$$
$$+1.5X_1 + 1X_2 = 9$$
$$-1.5X_1 - 3X_2 = 15$$

$$1.5X_1 + 1X_2 = 9$$
$$-2X_2 = -6$$
$$X_2 = \frac{6}{2} = 3$$
$$X_1 + 2(3) = 10$$
$$X_1 = 4$$

V_4 (4,3)

Y los vértices que se determinan directamente sobre el grafico: V_1 (2,2) y V_2 (2,3)

Cuarto, Determinamos la solución óptima. Reemplazamos cada vértice y aquel que nos de la mayor solución será la óptima.

V_1 (2,2) $\quad U = 3X_1 + 5X_2 = 3(2) + 5(2) = 6 + 10 = 16$

V_2 (2,3) $\quad U = 3X_1 + 5X_2 = 3(2) + 5(3) = 6 + 15 = 21$

V_3 (2.67, 3.67) $\quad U = 3X_1 + 5X_2 = 3(2.67) + 5(3.67) = 26.3$

V_4 (4,3) $\quad U = 3X_1 + 5X_2 = 3(4) + 5(3) = 12 + 15 = 27$

V_5 (4.67, 2) $\quad U = 3X_1 + 5X_2 = 3(4.67) + 5(2) = 14.01 + 10 = 24.01$

Por último, la solución óptima se obtiene en el vértice V_4 (4,3) y corresponde a:

$U_{max} = 27$

$X_1 = 4$

$X_2 \ = 3$

Ejemplo: Maximizar el siguiente modelo.

Máx.: $U = 50X_1 + 78X_2$

Restricciones:

$3.6X_1 + 4.8X_2 \leq 4800$

$1.6X_1 + 1.8X_2 \leq 1980$

$0.6X_1 + 0.6X_2 \leq 900$

$X_1 \qquad \geq 300$

$\quad X_2 \ \geq 180$

$X_1, X_2 \geq 0$

Primero, determinamos los puntos de intersección, para lo cual transformamos las inecuaciones en ecuaciones:

$$3.6X_1 + 4.8X_2 = 4800$$

$$X_1 = 0 \qquad X_2 = 1000$$

$$X_2 = 0 \qquad X_1 = 1333.3$$

$$1.6X_1 + 1.8X_2 = 1980$$

$$X_1 = 0 \qquad X_2 = 1100$$

$$X_2 = 0 \qquad X_1 = 1237.5$$

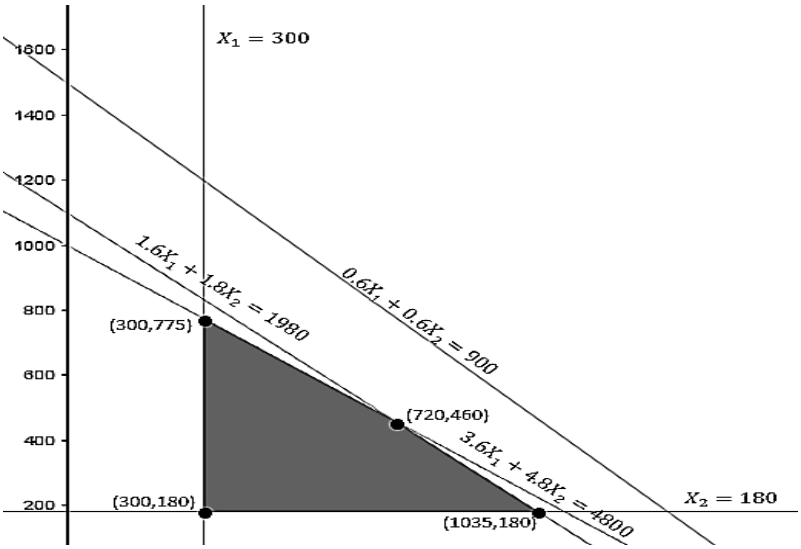
$$0.6X_1 + 0.6X_2 = 900$$

$$X_1 = 0 \qquad X_2 = 1500$$

$$X_2 = 0 \qquad X_1 = 1500$$

Segundo, graficamos cada ecuación y definimos la zona solución tomando un punto de prueba (usualmente P (0, 0)), sombreando la zona donde la desigualdad es verdadera.

Grafico:



$3.6(0) + 4.8(0) \leq 4800$	$1.6(0) + 1.8(0) \leq 1980$	$0.6(0) + 0.6(0) \leq 900$
$0 \leq 4800$	$0 \leq 1980$	$0 \leq 900$
Verdadero	Verdadero	Verdadero

Tercero, en el grafico donde coinciden los sombreados de todas las desigualdades se define una zona que la denominamos región factible. De este polígono determinamos sus vértices, resolviendo los sistemas de ecuaciones que dan lugar a la intersección respectiva.

Formamos sistemas y resolvemos:

Primer sistema:

$3.6X_1 + 4.8X_2 = 4800$
$1.6X_1 + 1.8X_2 = 1980$
resolvemos:

$$\begin{array}{lr} (-1.6) & -5.76X_1 - 7.68X_2 = -7680 \\ (3.6) & 5.76X_1 + 6.48X_2 = 7128 \\ \hline & 1.2X_2 = 552 \\ & X_2 = \dfrac{552}{1.2} \\ & X_2 = 460 \end{array}$$

$3.6X_1 + 4.8(460) = 4800$
$3.6X_1 + 2208 = 4800$
$3.6X_1 = 2592$
$X_1 = 720$, el resultado es: V_3 (720,460)

Segundo sistema:

$1.6X_1 + 1.8X_2 = 1980$
$X_2 = 180$

resolvemos:
$1.6X_1 + 1.8(180) = 1980$
$1.6X_1 + 324 = 1980$
$1.6X_1 = 1656$
$X_1 = 1035$
el resultado es: V4 (1035, 180)

Tercer sistema:

$3.6X_1 + 4.8X_2 = 4800$
$X_1 = 300$

resolvemos:
$3.6(300) + 4.8X_2 = 4800$
$1080 + 4.8X_2 = 4800$
$4.8X_2 = 3720$
$X_2 = 775$
el resultado es: V_2 (300,775)

Y el vértice 1 que se pude determinar directamente sobre el grafico: V_1 (300,180)

Cuarto, Determinamos la solución óptima. Reemplazamos cada vértice y aquel que nos dé la mayor solución será la óptima.

V_1 (300,180) $U = 50(300) + 78(180) = 29040$

V_2 (300,775) $U = 50(300) + 78(775) = 75450$

V_3 (720,460) $U = 50(720) + 78(460) = 71880$

V_4 (1035,180) $U = 50(1035) + 78(180) = 657290$

Por último, la solución óptima se obtiene en el vértice V_2 (300,775) y corresponde a:

U_{max} = \$ 75.450

$X_1 = 300$

$X_2 = 775$

Ejemplo: Maximizar el siguiente modelo.

Maximice $Z = 2X_1 + X_2$

Restricciones: $2X_1 - X_2 \leq 8$

$X_1 - X_2 \leq 3$

$X_1 + 2X_2 \leq 14$

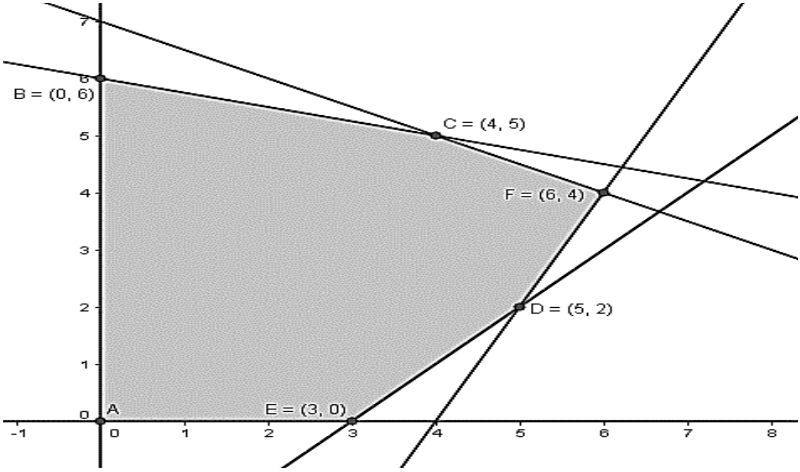
$X_1 + 4X_2 \leq 24$

$X_1, X_2 \geq 0$

Primero, determinamos los puntos de intersección, para lo cual transformamos las inecuaciones en ecuaciones:

1º Restricción:	2º Restricción:	3º Restricción:	4º Restricción:
$2X_1 - X_2 < 8$	$X_1 - X_2 < 3$	$X_1 + 2X_2 < 14$	$X_1 + 4X_2 < 24$
$2X_1 - X_2 = 8$	$X_1 - X_2 = 3$	$X_1 + 2X_2 = 14$	$X_1 + 4X_2 = 24$
$X_1 = 0$ $X_2 = -8$	$X_1 = 0$ $X_2 = -3$	$X_1 = 0$ $X_2 = 7$	$X_1 = 0$ $X_2 = 6$
$X_2 = 0$ $X_1 = 4$	$X_2 = 0$ $X_1 = 3$	$X_2 = 0$ $X_1 = 14$	$X_2 = 0$ $X_1 = 24$
Punto de prueba	Punto de prueba	Punto de prueba	Punto de prueba
P (0, 0) al reemplazar	P (0, 0) al reemplazar	P (0, 0) al reemplazar	P (0, 0) al reemplazar
nos queda Verdadera.	nos queda Verdadera.	nos queda Verdadera.	nos queda Verdadera.

Segundo, graficamos cada ecuación y definimos la zona solución tomando un punto de prueba (usualmente P (0, 0)), sombreando la zona donde la desigualdad es verdadera.



Tercero, resolviendo los sistemas de ecuaciones, obtenemos los vértices indicados en el gráfico: B(0, 6), C(4, 5), D(5, 2), E(3, 0) y F(6,4).

Cuarto, Determinamos la solución óptima. Reemplazamos cada vértice en la función objetivo y aquel que nos dé la mayor solución será la óptima.

Función objetivo: $Z = 2X_1 + X_2$

B (0, 6) $Z = 2(0) + (6) = 6$

C (4, 5) $Z = 2(4) + (5) = 13$

D (5, 2) $Z = 2(5) + (2) = 12$

E (3, 0) $Z = 2(3) + (0) = 6$

F (6, 4) $Z = 2(6) + (4) = 16$

Por último, la solución óptima se obtiene en el vértice F (6, 4) y corresponde a:

$Z_{máx} = 16$, $X_1 = 6$ y $X_2 = 4$.

Ejemplo: Minimizar el siguiente modelo.

Minimizar: $C = 1130 - 2x - y$

Restricciones: $X_1 + X_2 \leq 80$

$X_1 + X_2 \geq 25$

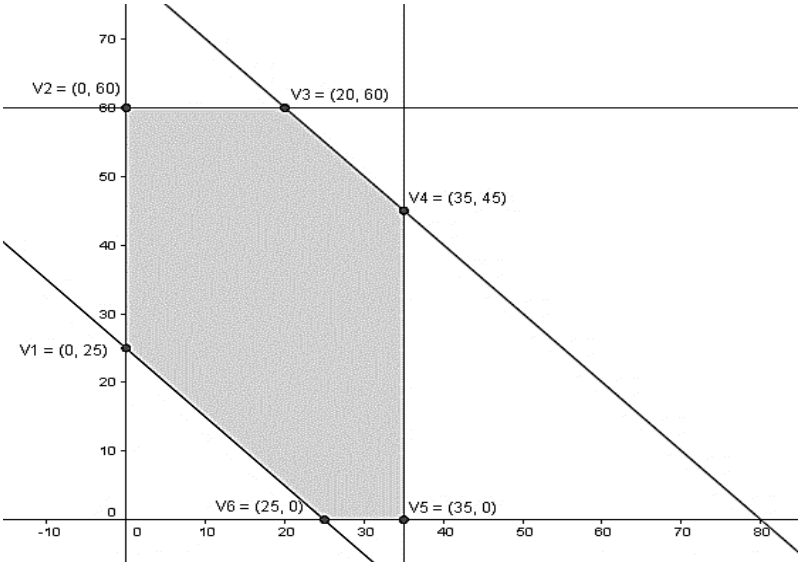
$X_1 \leq 35$

$X_2 \leq 60$

$X_1, X_2 \geq 0$

Graficar el modelo y obtener la zona solución. Para lo cual seguimos los mismos procesos anteriores.

La gráfica de este sistema es la región R que se muestra en la figura.



Obtener los vértices de la zona solución. Formando sistemas de ecuaciones y resolviendo tenemos los vértices:

V_1 (0, 25), V_2 (0, 60), V_3 (20, 60), V_4 (35, 45), V_5 (35, 0) y V_6 (25, 0).

Reemplazar cada vértice en la función objetivo y Obtener la solución óptima

Para determinar el valor mínimo de C en R, necesitamos comprobar sólo los vértices que se ven en la figura como en la tabla siguiente.

V_1 (0, 25)) $C = 1130 - 2x - y = 1130 - 2(0) - (25) = 1105$

V_2 (0, 60) $C = 1130 - 2x - y = 1130 - 2(0) - (60) = 1070$

V_3 (20, 60) $C = 1130 - 2x - y = 1130 - 2(20) - (60) = 1030$

V_4 (35, 45) $C = 1130 - 2x - y = 1130 - 2(35) - (45) = 1015$

V_5 (35, 0) $C = 1130 - 2x - y = 1130 - 2(35) - (0) = 1060$

V_6 (25, 0) $C = 1130 - 2x - y = 1130 - 2(25) - (0) = 1080$

De los resultados obtenidos, concluimos que el costo mínimo de envío es $1015 y ocurre si x = 35, y = 45.

Ejemplo: Minimizar el siguiente modelo.

Minimizar $C = 2X_1 + 3X_2$

$X_1 + X_2 \leq 350$

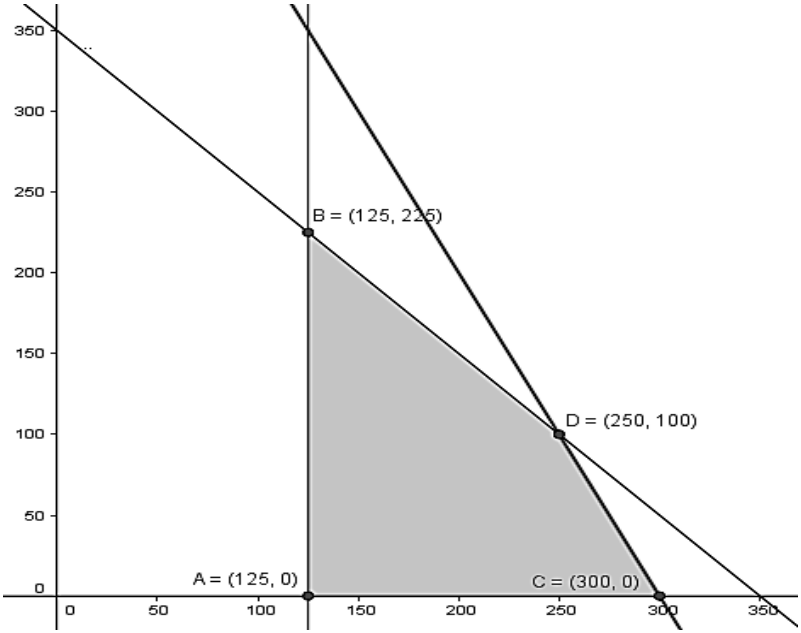
$X_1 \geq 125$

$2X_1 + X_2 \leq 600$

$X_1, X_2 \geq 0$

Primero Graficamos el modelo y obtener la zona solución. Para lo cual seguimos los mismos procesos anteriores.

La gráfica de este sistema es la región que se muestra en la figura.



Segundo, formando los sistemas con las intersecciones de las rectas y resolviendo obtenemos los vértices de la región optima A (125, 0), B (125, 225), C (300, 0), D (250, 100).

Tercero, se reemplaza cada vértice en la función objetivo y obtenemos la solución óptima.

Para determinar el valor mínimo de C en R, necesitamos comprobar sólo los vértices que se ven en la figura como en la tabla siguiente.

A (125, 0) $\quad C = 2\,X1 + 3\,X2 = 2(125) + 3(0) = 250$

B (125, 225) $\quad C = 2\,X1 + 3\,X2 = 2(125) + 3(225) = 925$

C (300, 0) $\quad C = 2\,X1 + 3\,X2 = 2(300) + 3(0) = 600$

D (250, 100) $C = 2X1 + 3X2 = 2(250) + 3(100) = 800$

De los resultados obtenidos, concluimos que el costo mínimo es \$125 y ocurre si $X_1 = 125$, $X_2 = 0$.

Ejemplo: Terapias con fármacos y radiación.

Con frecuencia existen formas alternativas de tratamiento para pacientes a los que se les diagnostica una enfermedad particular compleja. Con cada tratamiento puede haber no sólo efectos positivos en el paciente, sino también efectos negativos, como toxicidad o malestar. Un médico debe hacer la mejor elección de estos tratamientos o combinación de ellos. Esta elección dependerá no sólo de los efectos curativos, sino también de los efectos tóxicos y de malestar.

Suponga que usted es un médico veterinario con un paciente canino que tiene cáncer a nivel ocular bajo su cuidado y existen dos posibles tratamientos disponibles: administración de medicamentos y terapia con radiación.

Supongamos que la eficacia de los tratamientos está expresada en unidades comunes, digamos, unidades curativas. La medicina contiene 1000 unidades curativas por onza y la radiación proporciona 1000 unidades curativas por minuto. Sus análisis indican que el paciente debe recibir al menos 3000 unidades curativas. Sin embargo, un grado de toxicidad está implícito en cada tratamiento.

Suponga que los efectos tóxicos de cada tratamiento están medidos en una unidad común de toxicidad, digamos, una unidad tóxica. La medicina contiene 400 unidades tóxicas por onza y la radiación produce 1000 unidades tóxicas por minuto. Con base en sus estudios, usted cree que el paciente no debe recibir más de 2000 unidades tóxicas.

Además, cada tratamiento implica un grado de malestar al paciente. La medicina provoca el triple de malestar por onza que la radiación por minuto. La tabla resume la información. El problema que se le plantea es determinar las dosis de la medicina y radiación que pueden satisfacer los requerimientos curativos y de toxicidad y, al mismo tiempo, minimizar el malestar al paciente.

Tabla de resumen de datos:

	Unidades curativas	Unidades Toxicas	Malestar relativo
Medicina (onzas)	1000	400	3
Radiación (minutos)	1000	1000	1
Requerimientos	≥ 3000	≤ 2000	

Sea x_1 el número de onzas de la medicina y x_2 el de minutos de radiación que serán administrados. Entonces usted quiere minimizar el malestar M dado por:

$M = 3x_1 + x_2$,

Sujeta a la condición curativa:

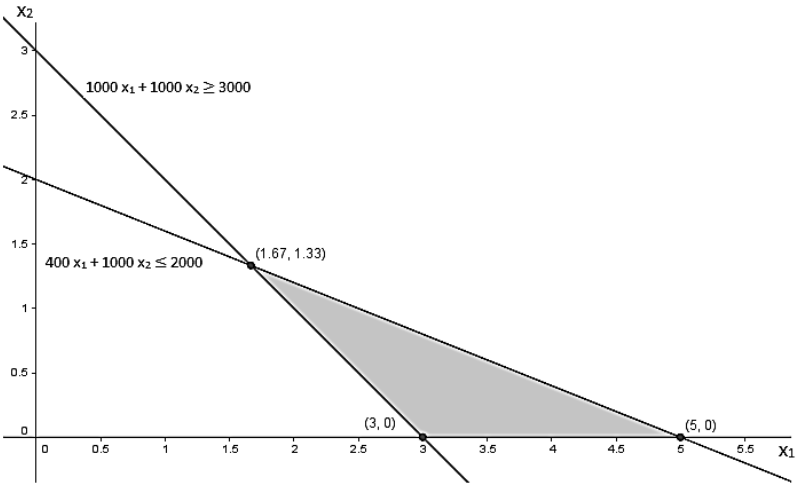
$1000\ x_1 + 1000\ x_2 \geq 3000$

Y a la condición de toxicidad

$400\ x_1 + 1000\ x_2 \leq 2000$

Donde $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$.

Al graficar se obtiene la región factible de la figura.



Los vértices son: (3, 0), (5, 0), (1.67, 1.33). Evaluando D en cada vértice se obtiene lo siguiente:

En (3, 0), M = 3(3) + 0 = 9.

En (5, 0), M = 3(5) + 0 = 15.

Y en (1.67, 1.33), M = 3(1.67) + 1.33= 6.3

Puesto que M es mínimo en (1.67, 1.33), usted debe prescribir un tratamiento de 1.67 de onza de la medicina y 1.33 minutos (1 minuto y 20 segundos) de radiación. Lo que se constituye en el “mejor” tratamiento para el paciente.

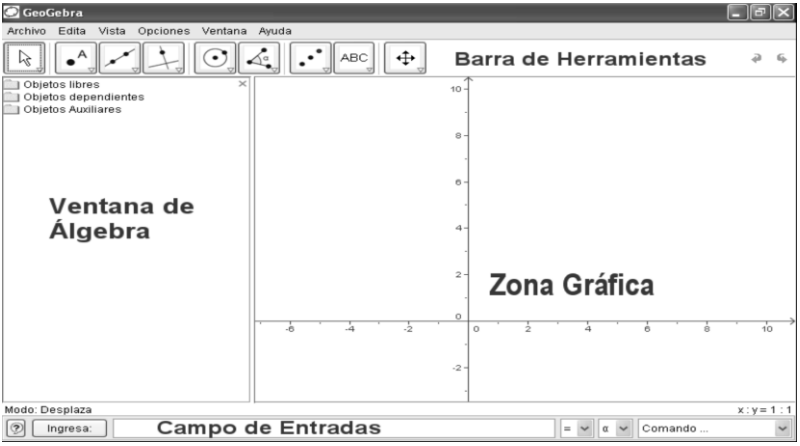
Resolución grafica mediante software GeoGebra

Geometría dinámica, álgebra y análisis conforman el programa educativo GeoGebra, es un utilitario disciplinar que conjuga geometría y álgebra al mismo nivel de importancia.

Permite construir de modo muy simple, puntos, figuras, segmentos, rectas, vectores, cónicas y también gráficas de funciones dinámicamente modificables mediante el mouse. GeoGebra también admite expresiones como: g: $3x + 4y = 7$ o: c: $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$ y ofrece una gama de comandos entre los que cabe destacar la derivación y la integración.

La característica más destacable de GeoGebra es la doble percepción de los objetos: cada expresión de la Ventana de Álgebra se corresponde con un objeto de la Zona Gráfica y viceversa.

Al iniciarse el programa se despliega una ventana como la siguiente:



Guiando con el mouse los útiles de construcción (modos) de la Barra de Herramientas puedes construirse figuras sobre la Zona Gráfica cuyas coordenadas o ecuaciones aparecen en la Ventana Algebraica.

En el Campo de Entradas o Campo de Texto pueden anotarse directamente coordenadas, ecuaciones, comandos y funciones que pasarán a representarse en la Zona Gráfica al ingresarse pulsando Enter (Intro en algunos teclados).

Ejemplo de problema de programación lineal mediante Geogebra

Dado el problema de programación lineal:

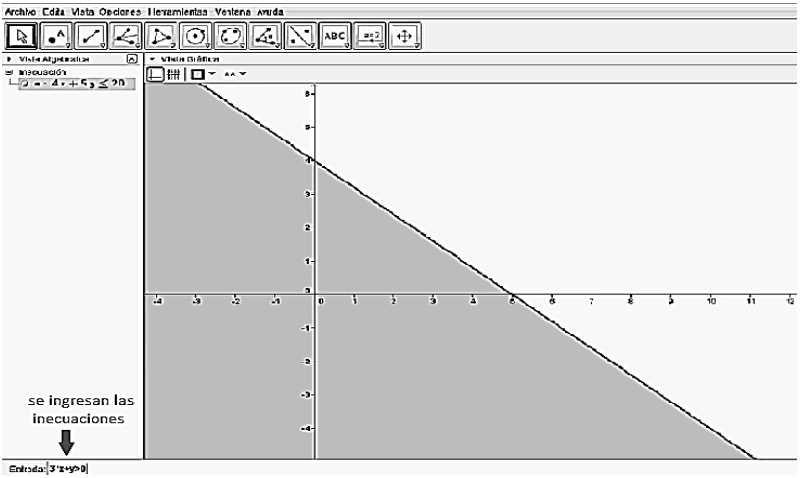
Maximizar $f(x, y) = 20x + 8y$

Sujeta a: $4x + 5y \leq 20$

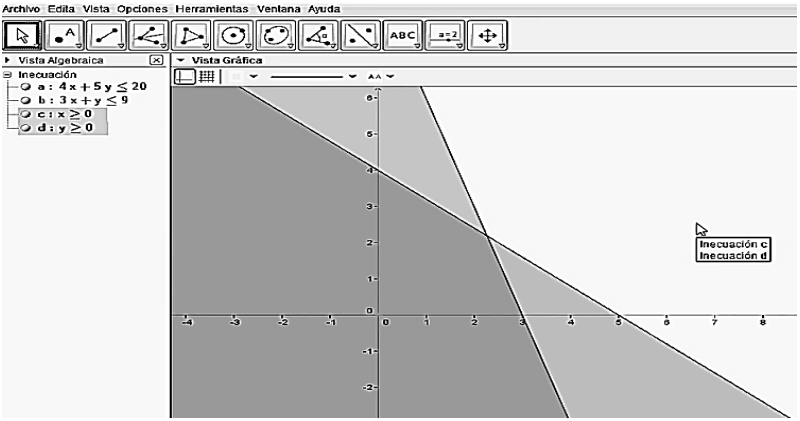
$3x + y \leq 9$

$x, y \geq 0$

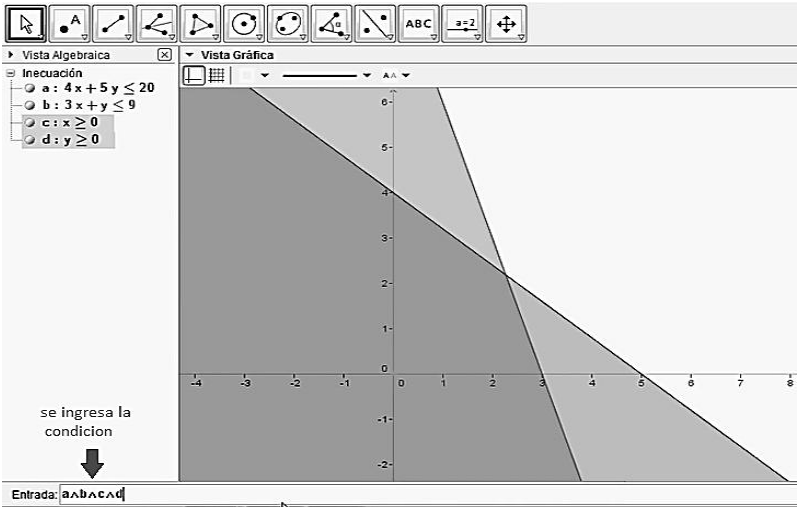
Paso 1: Primero ingresamos las restricciones



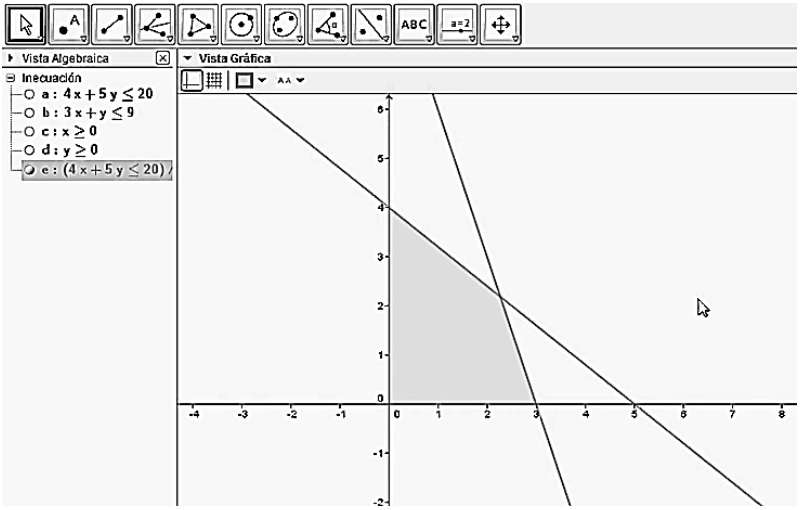
Hasta que se hallan ingresado todas:



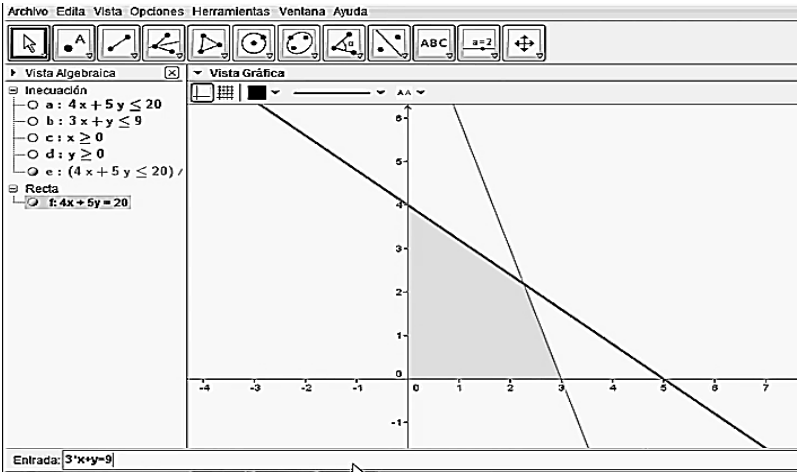
Paso 2: Se ingresa la condición, para la obtención de la zona solución.



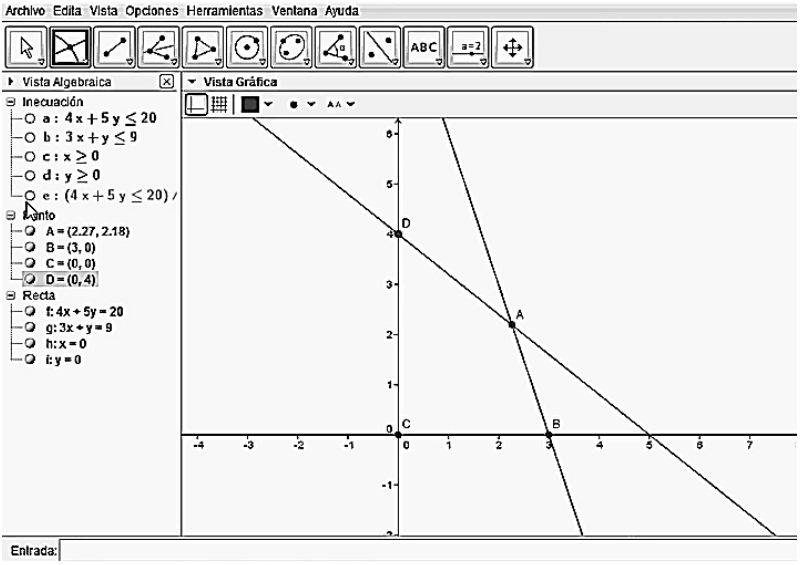
Se marca la solución con un color o rayado diferente



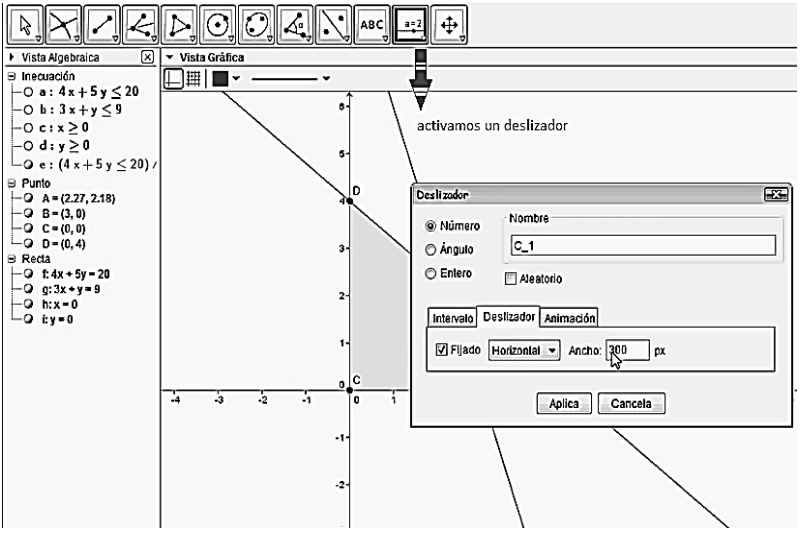
Paso 3: Se ingresan como rectas cada una de las restricciones.



Se marcan los puntos de intersección.

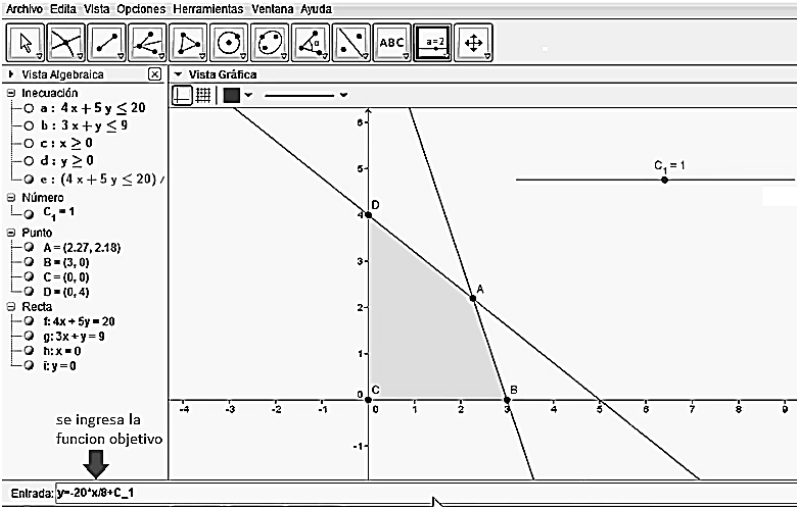


Paso 4: Se activa un deslizador denominado C_1

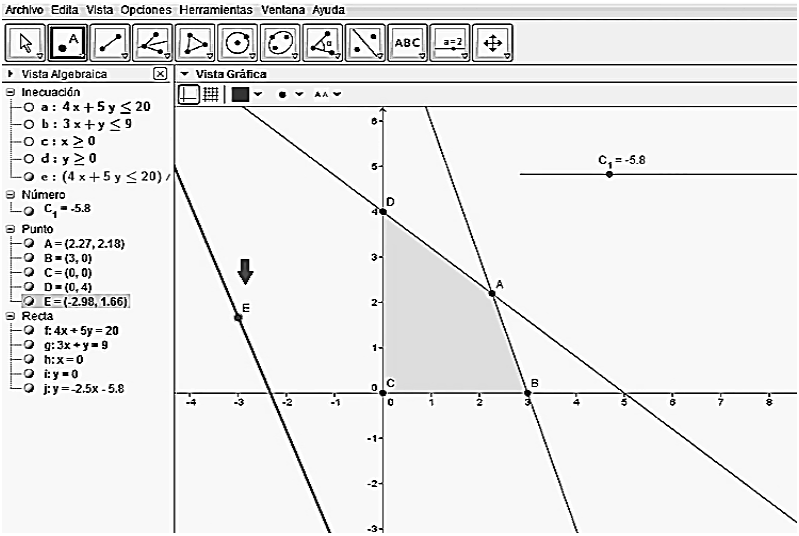


Paso 5: Ingresamos la funcion objetivo: f(x, y) = 20x + 8y, de donde hacemos f(x, y) = C_1 y despejamos Y.

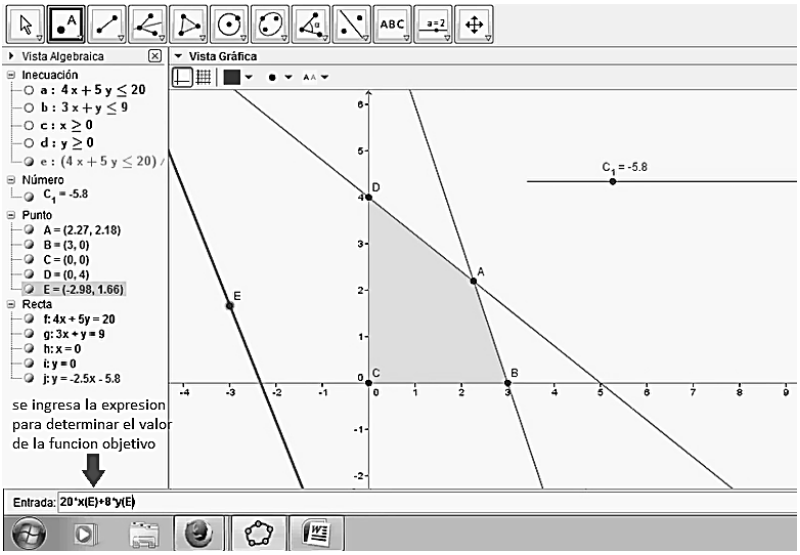
C_1 = 20x + 8y despejando **y = -20x/8 + C_1**



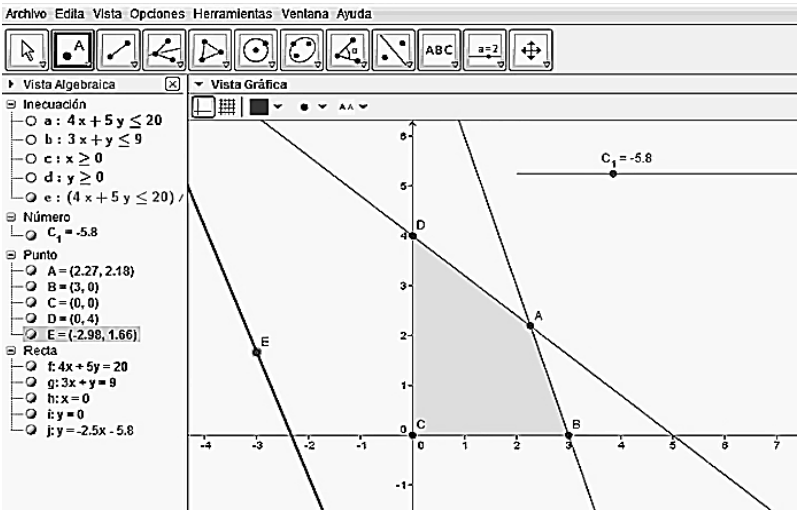
Se coloca un punto sobre la recta de la función objetivo **(E)**



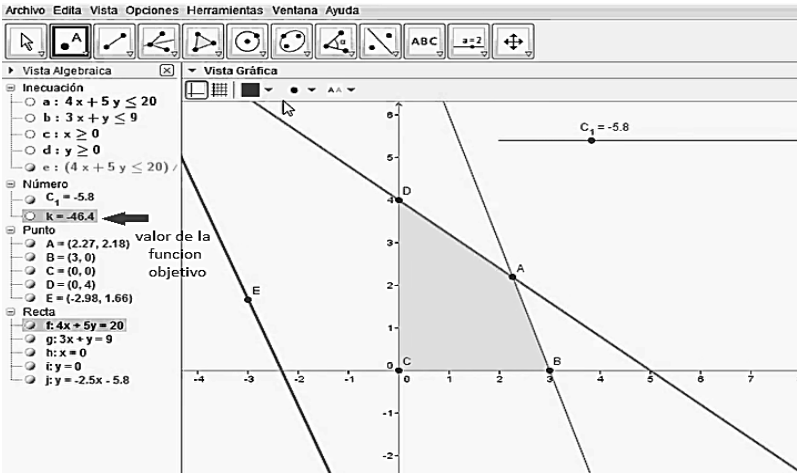
Se determina el valor de la función objetivo, para lo cual ingresamos: 20x(E) + 8y(E) y nos aparece el valor de K.



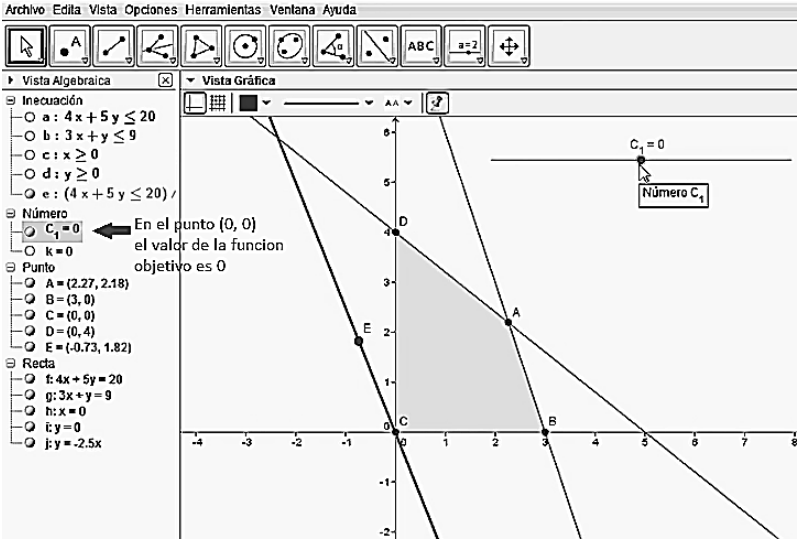
Se va moviendo la recta objetivo con el deslizador por cada uno de los puntos vértices de la función objetivo.



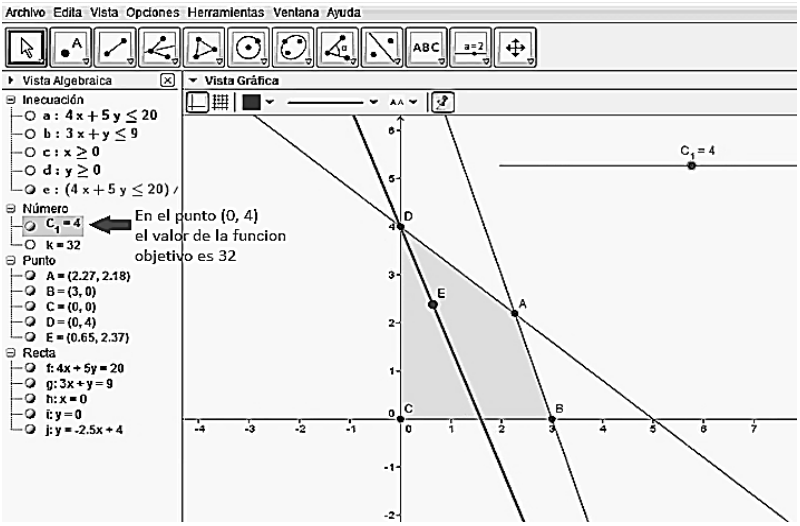
Se observa que al moverse el deslizador el valor de la función objetivo varia **(K)**



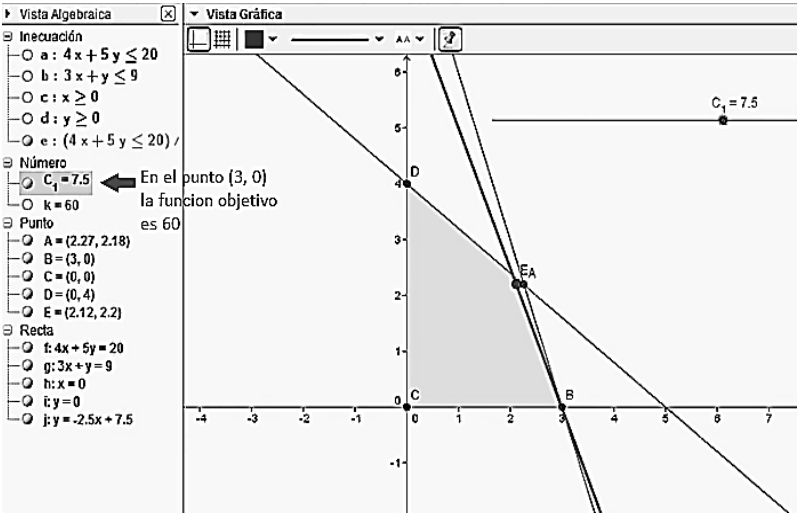
En el punto (0, 0) se obtiene el valor mínimo de la función objetivo.



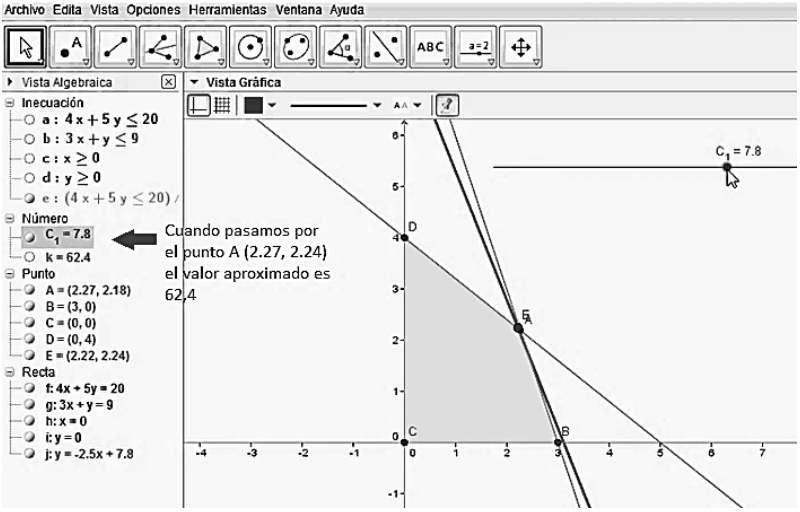
Luego nos movemos al punto (0, 4) y obtenemos el valor de 32.



Continuamos con el punto (3, 0) y el valor es 60.



Y por último reemplazamos el vértice (2.27, 2.24) y se obtiene el valor máximo de: 62,4.



Otro ejemplo:

Café: Una tienda especializada en café dispone de 75 libras de café tipo “A” y 120 libras de café tipo “B” las cuales se mezclan en paquetes de 1 libra de la manera siguiente:

Una mezcla económica con 4 onzas de café tipo “A” y 12 onzas de café tipo “B”

Una mezcla superior con 8 onzas de café tipo “A” y 8 onzas de café tipo “B”

a) Escriba un sistema de desigualdades lineales que describa la cantidad posible de paquetes de tipo de cada mezcla.

b) Haga la gráfica del sistema y señale los vértices.

c) ¿En qué punto obtiene mayor producción y puede maximizar sus ganancias?

Definicion de variables:

X= numero de paquetes mezcla economica (1lb)

Y= numero de paquetes de mexcla superior (1lb)

Funcion objetivo:

Maximizar N = 16X + 16Y

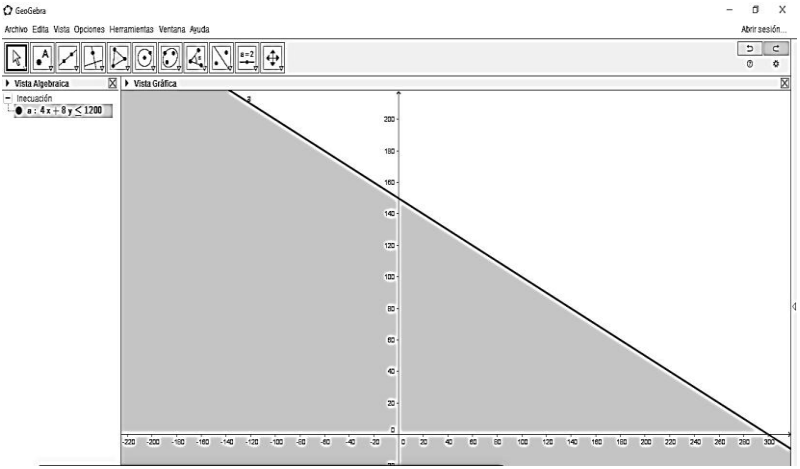
Restricciones

$4X + 8Y \leq 1200$

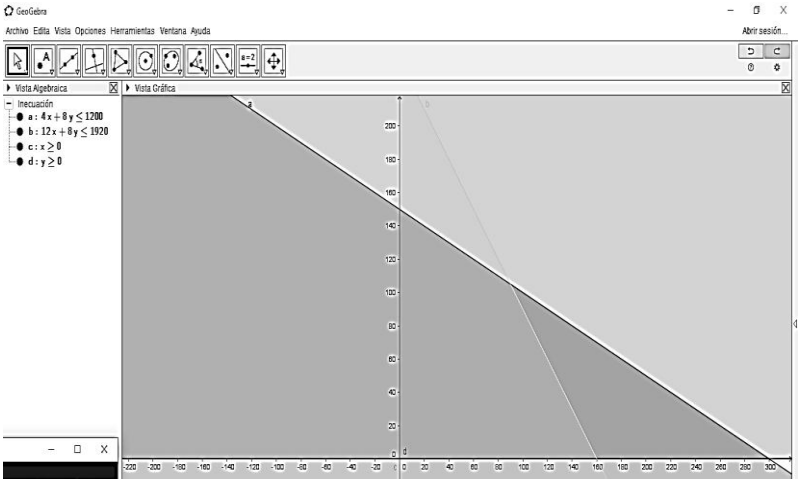
$12X + 8Y \leq 1920$

$X, Y \geq 0$

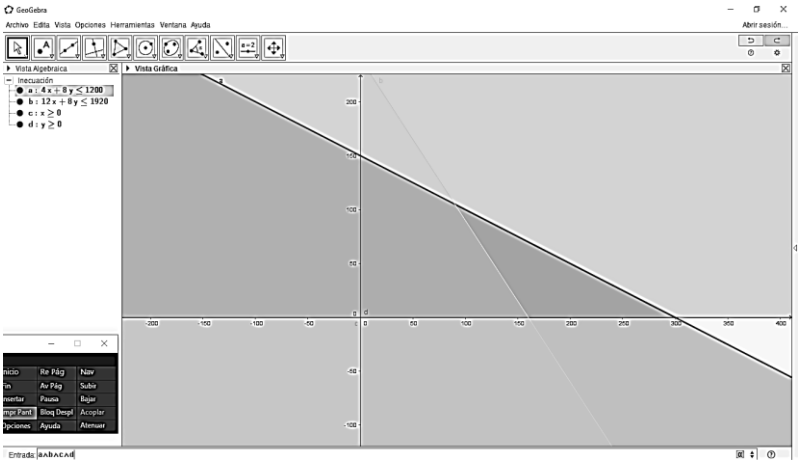
Paso 1: Primero ingresamos las restricciones



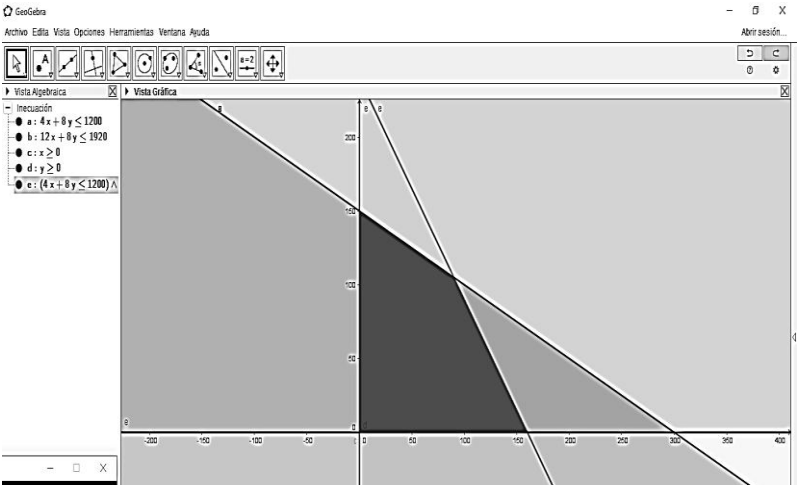
Ingresamos todas las restricciones



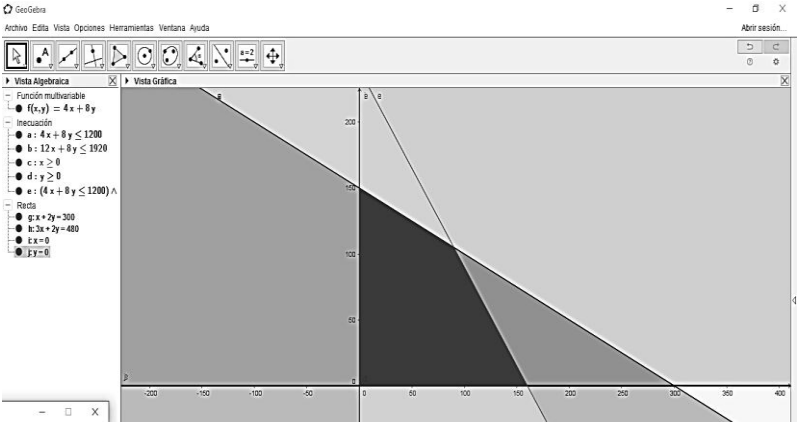
Paso 2: Se ingresa la condición, para obtener la zona solución



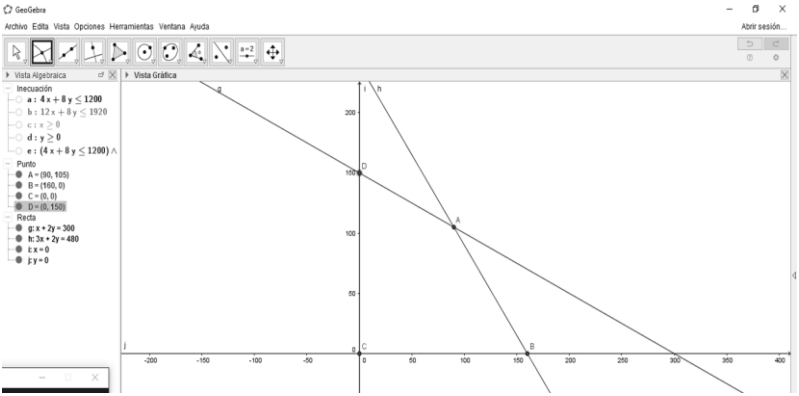
Marcar la solución con un color diferente



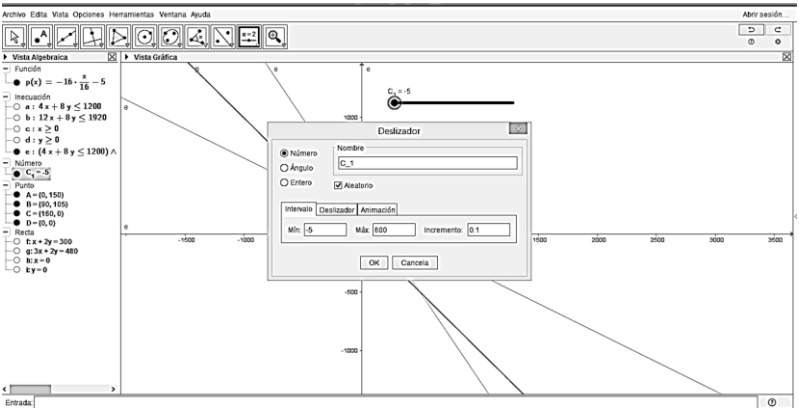
Paso 3: Se ingresan como rectas cada una de las restricciones



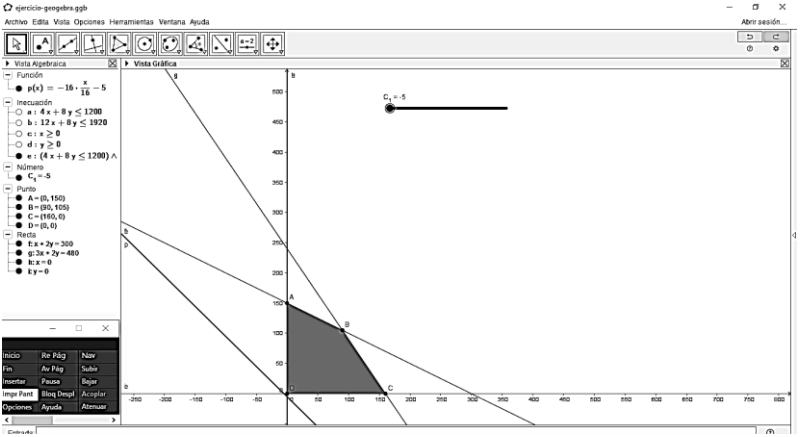
Paso 4: Se marcan los puntos de intersección



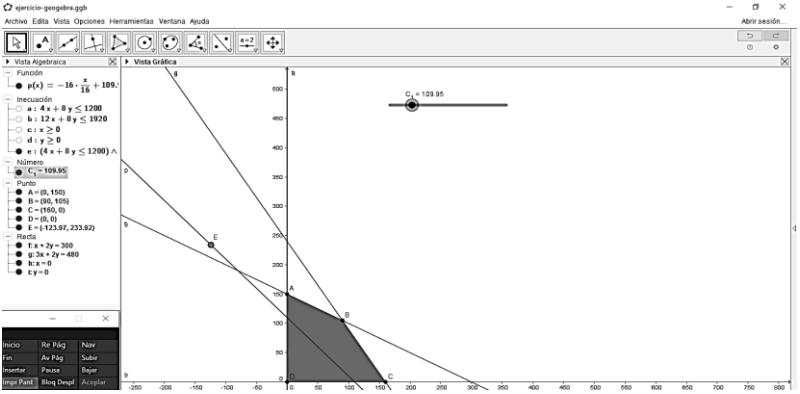
Paso 5: Se activa un deslizador denominado C_1



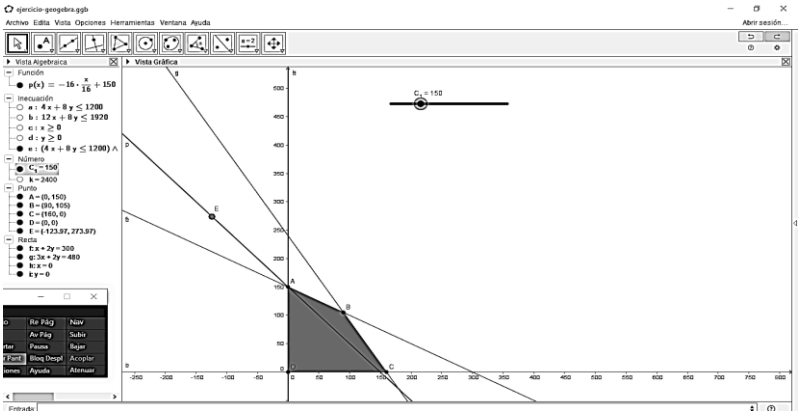
Paso 6: Ingresamos la función objetivo despejando y queda así y = -16x/16 + C_1



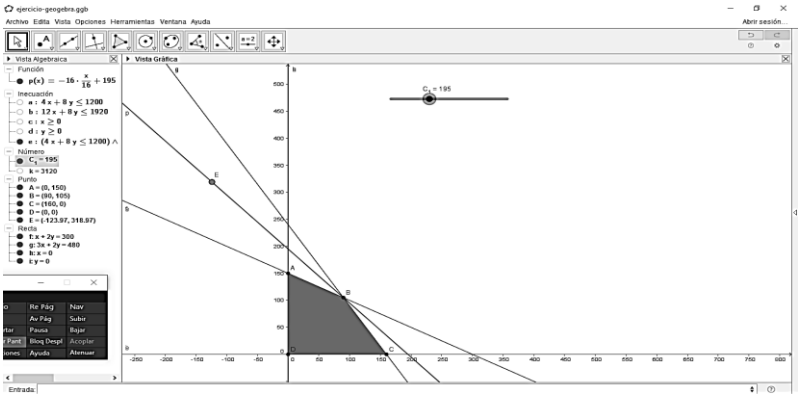
Paso 7: Ingresamos un punto (E) sobre la recta de la función objetivo



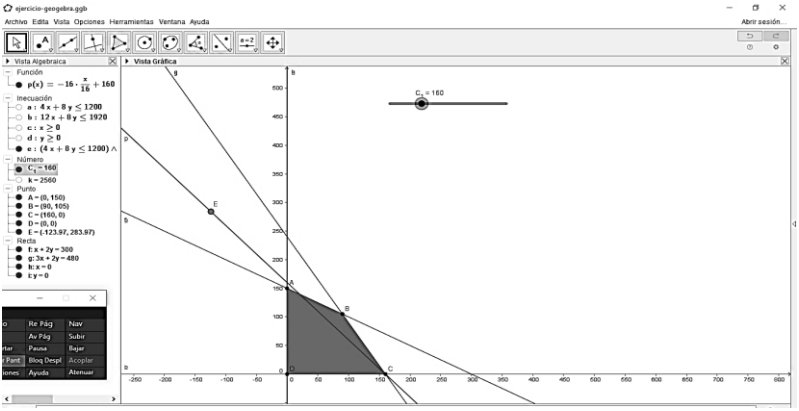
Paso 8: Ingresamos K = 16x(E) + 16(E) y se observa que el deslizador se mueve en el punto (0, 150) se obtiene el valor máximo k = 2400.



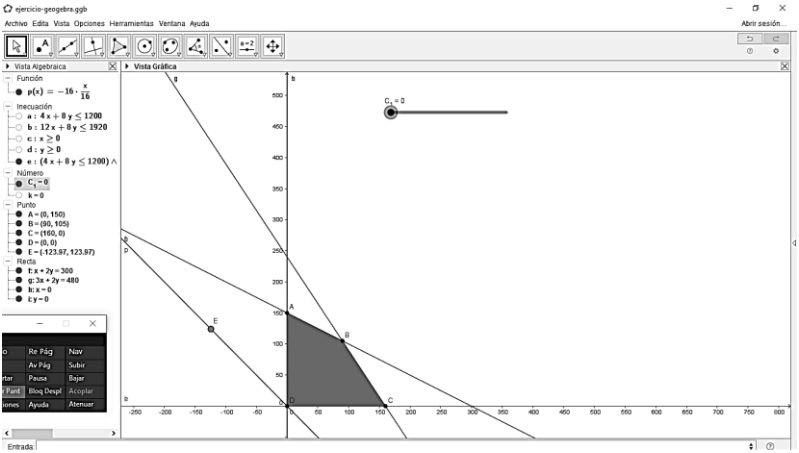
Paso 9: En el punto B=(90, 105) se obtiene el valor en K= 3120 valor máximo



Paso 10: En el punto C = (160, 0), se obtiene el valor de K = 2560



Paso 11: En el punto D=(0,0) se obtiene el valor de K= o



Análisis de Sensibilidad.

En todos los modelos de programación lineal los coeficientes de la función objetivo y las restricciones se dan como datos de entrada o como parámetros fijos del modelo. En los problemas reales los valores de estos coeficientes no están, en general, perfectamente fijados, debido a que la mayoría de ellos dependen de parámetros no controlables, por ejemplo, futuras demandas, costos de materias primas, costo de energía, etc. y no pueden ser predichas con exactitud antes de que el problema sea resuelto. También puede suceder que aunque conozcamos los parámetros exactamente estemos interesados en estudiar como varía la solución óptima si cambiamos algún parámetro intencionadamente, a efectos de tratamiento, ambas situaciones se resuelven de forma análoga.

Uno de los objetivos básico del análisis de sensibilidad es identificar los parámetros sensibles, es decir los parámetros cuyos valores no pueden cambiar sin que cambie la solución óptima. Para ciertos datos que no están clasificados como sensibles, también puede resultar de gran utilidad determinar el intervalo de valores del parámetro para el que la solución óptima no cambie.

El análisis de sensibilidad nos proporcionara herramientas para el cálculo de las soluciones óptimas de los problemas obtenidos por la modificación de los parámetros originales del problema. Además, nos permite analizar el impacto en los resultados del modelo (solución óptima y valor óptimo) en aquellos casos donde uno o varios parámetros sufren modificaciones en relación a sus valores originales, sin la necesidad de resolver nuevamente el problema (sin reoptimizar).

Análisis de sensibilidad para los coeficientes de la función objetivo

El análisis de sensibilidad permite estudiar cómo las variaciones en los valores de los coeficientes del modelo modificarán la solución óptima sin tener que resolver el problema para las distintas posibilidades.

Intervalo de Optimalidad

Son los intervalos de los coeficientes de la funcion objetivo para los cuales la base actual sigue siendo optima. En estos intervalos puede variar el valor de la función objetivo, pero los valores de las variables de decisión se conservan sin cambio. Por ejemplo puedo variar un precio dentro de este intervalo y los valores óptimos de las variables de decisión se conservan sin cambio, pero hay un nuevo valor para la función óptima. En dicho contexto se presenta un ejemplo de dicho análisis para un problema de optimización lineal que considera 2 variables de decisión.

Ejemplo: Grafique el intervalo de optimalidad (de coeficientes) y de factibilidad (restricciones) del siguiente modelo:

Maximizar $Z = 5x_1 + 4x_2$

Sujeto a:

$6X_1 + 4X_2 \leq 24$ (1)

$X_1 + 2X_2 \leq 6$ (2)

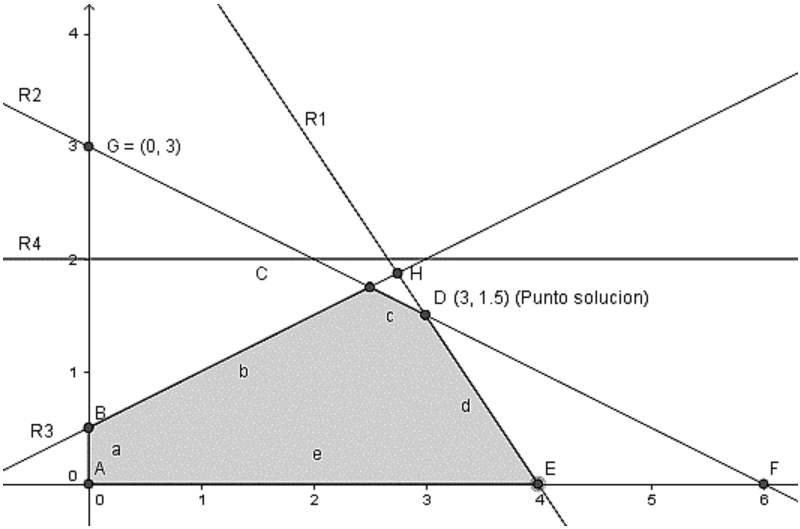
$-X_1 + X_2 \leq 1$ (3)

$X_2 \leq 2$ (4)

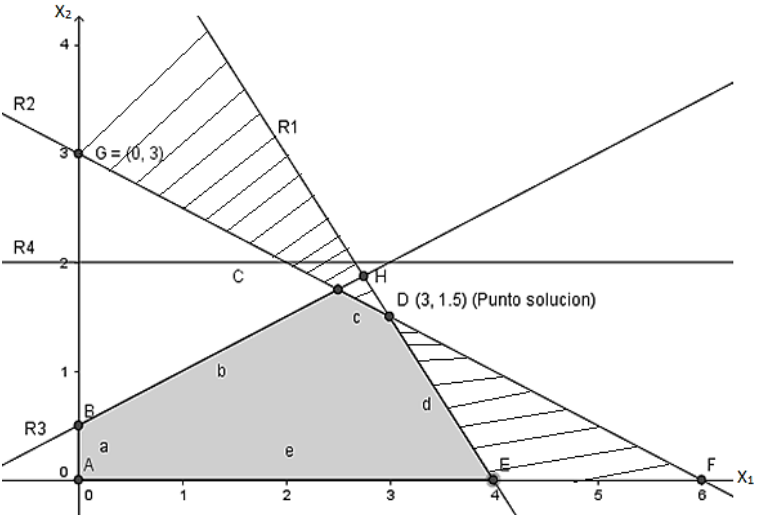
$X_1, X_2 \geq 0$

Primero determinamos el Intervalo de optimalidad para los coeficientes de la función objetivo, lo que consiste en variar los coeficientes de $z= C_1X_1 + C_2X_2$ sin que cambie la solución óptima. De los datos de su solución óptima, en este caso vértice D = (3, 1.5) en $Z = 5X_1 + 4X_2$, que corresponde a Z=21, X_1=3, X_2=1.5

Del grafico del modelo:



Si iniciamos con el análisis del coeficiente de X_1 en la función objetivo: $Z = 5X_1 + 4X_2$, al cual denominaremos C_1, entonces: $Z = C_1X_1 + 4X_2$ que es una recta que pasa por el vértice D (3, 1.5) que corresponde a la solución y lo que puede variar es su pendiente en la zona rayada en el gráfico:



Es decir $Z = C_1 X_1 + 4 X_2 = K$, es una recta que pasa por el vértice de la solución óptima, que puede variar su inclinación dentro del cono rayada. Entonces la pendiente de la recta de la función objetiva debe estar dentro del intervalo de las pendientes de la restricción 2 a la restricción 1, como se puede observar en el grafico anterior. Analíticamente tenemos:

Para C_1 y usando la fórmula de la pendiente de una recta $m = -\frac{A}{B}$, determinamos:

La pendiente de la recta restricción (2) $X_1 + 2X_2 \leq 6$, seria: $m_2 = -\frac{1}{2}$

La pendiente de la función objetivo $C_1X_1 + 4X_2 = K$, seria: $m_3 = -\frac{C_1}{4}$

La pendiente de la recta restricción (1) $6X_1 + 4X_2 \leq 24$, seria: $m_1 = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$

Entonces nos queda el intervalo:

$-\frac{3}{2} \leq -\frac{C_1}{4} \leq -\frac{1}{2}$, cambiando de signo y ordenando tenemos:

$\frac{1}{2} \leq \frac{C_1}{4} \leq \frac{3}{2}$ Simplificando

$2 \leq C_1 \leq 6$

La solución óptima no varía, si el valor del coeficiente varia en el intervalo, $2 \leq C_1 \leq 6$. Pero la función objetivo si va a variar.

Para C_2, el proceso es muy similar:

La pendiente de la recta restricción (2) $X_1 + 2X_2 \leq 6$, seria: $m_2 = -\frac{1}{2}$

La pendiente de la función objetivo $5X_1 + C_2X_2 = K$, seria: $m_3 = -\frac{5}{C_2}$

La pendiente de la recta restricción (1) $6X_1 + 4X_2 \leq 24$, seria: $m_1 = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$

Entonces nos queda:

$-\frac{3}{2} \leq -\frac{5}{C_2} \leq -\frac{1}{2}$, cambiando de signo y ordenando tenemos:

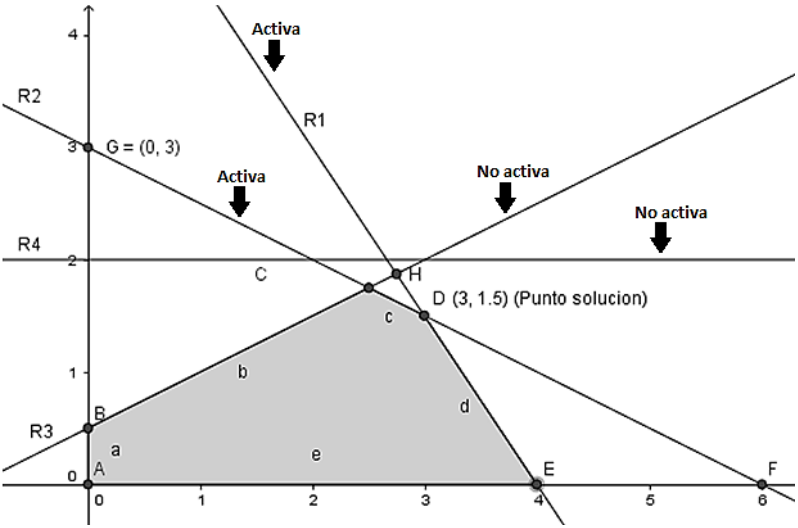
$\frac{1}{2} \leq \frac{5}{C_2} \leq \frac{3}{2}$ Simplificando

$\frac{10}{3} \leq C_2 \leq 10$

La solución óptima no varía, si el valor del coeficiente varía en el intervalo $\frac{10}{3} \leq C_2 \leq 10$ obtenido. Pero la función objetivo si va a variar.

Intervalo de factibilidad del lado derecho de una restricción

El intervalo de factibilidad del lado derecho de las restricciones de un modelo de P.L. consiste en variar el lado derecho de las restricciones de disponibilidad sin que la solución óptima sufra algún cambio. Para esto, inicialmente se identifican las restricciones activas y las no activas. Las restricciones son activas si pasan por el vértice de la solución, en caso contrario es no activa.



De lo que tenemos:

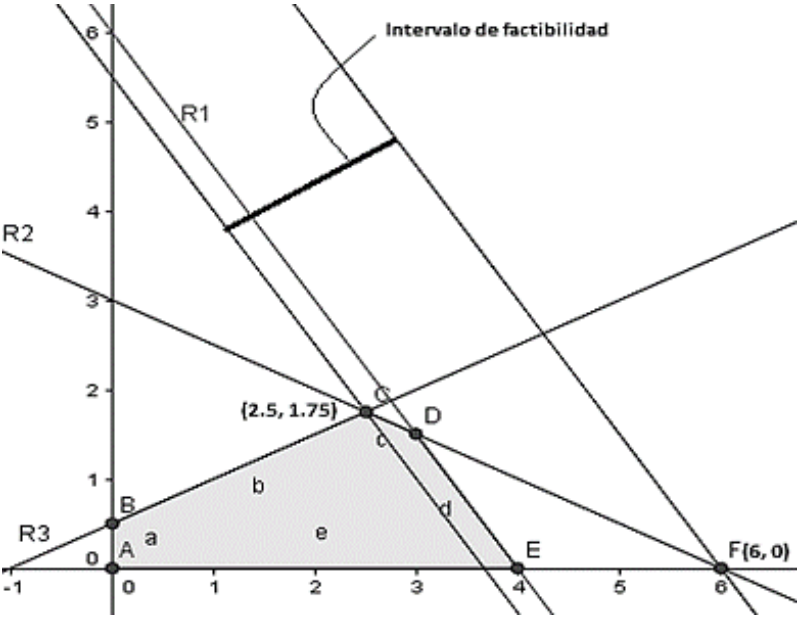
(R1) $6X_1 + 4X_2 \leq 24$ Restricción Activa

(R2) $X_1 + 2X_2 \leq 6$ Restricción Activa

(R3) $-X_1 + X_2 \leq 1$ Restricción No Activa

(R4) $X_2 \leq 2$ Restricción No Activa

Para la determinación Intervalo de factibilidad de la Restricción activa 1, la línea de R1 se mueve en forma paralela hacia su izquierda hasta la intersección de otras dos restricciones activas C(2.5, 1.75) se establece el límite inferior del intervalo de factibilidad y si movemos hacia la derecha de R1 hasta la intersección con otras dos restricciones F(6, 0) se define el intervalo superior de factibilidad.



Luego, tomamos el valor inferior C (2.5, 1.75) y reemplazamos a la izquierda y F (6, 0) a la derecha del siguiente intervalo:

$6X_1 + 4X_2 \leq b_1$ (R1)

$6X_1 + 4X_2 \leq b_1 \leq 6X_1 + 4X_2$

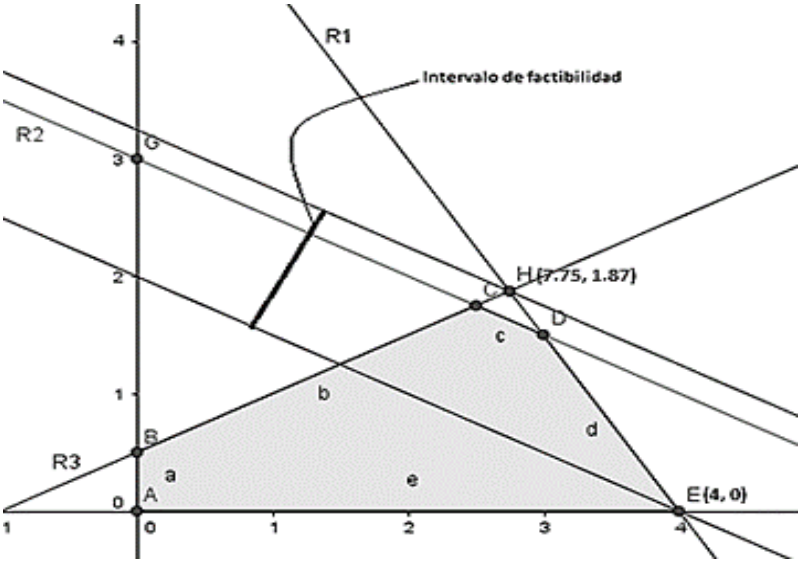
$6(2.5) + 4(1.75) \leq b_1 \leq 6(6) + 4(0)$

$15 + 7 \leq b_1 \leq 36 + 0$

$22 \leq b_1 \leq 36$

Para este intervalo la solución varia y también la función objetiva.

En el caso del intervalo de la Restricción activa 2, la línea de R2 se mueve en forma paralela hacia su izquierda hasta la intersección de otras dos restricciones activas E(4, 0) se establece el límite inferior del intervalo de factibilidad y si movemos hacia la derecha de R2 hasta la intersección con otras dos restricciones H(2.75, 1.87) se define el intervalo superior de factibilidad.



Luego, tomamos el valor inferior E (4, 0) y reemplazamos a la izquierda y H (2.75, 1.87) a la derecha del siguiente intervalo:

$X_1 + 2X_2 \leq b_2$ (R2)

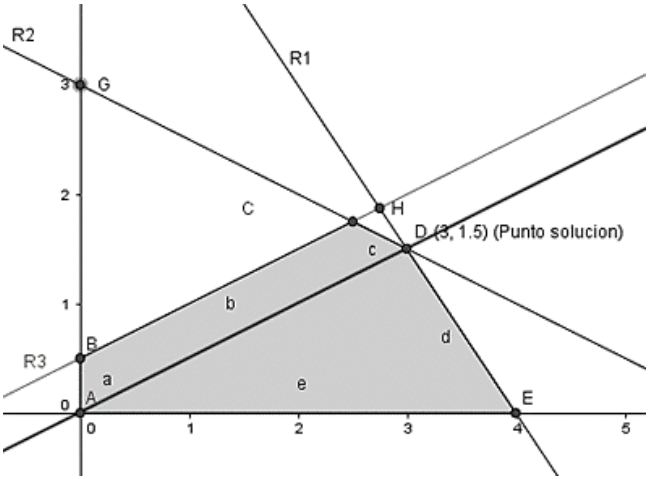
$X_1 + 2X_2 \leq b_2 \leq X_1 + 2X_2$

$4 + 2(0) \leq b_2 \leq 2.75 + 2(1.87)$

$4 \leq b_2 \leq 6.49$

Para este intervalo la solución varia y también la función objetiva.

Para la determinación de la Restricción No activa 3, la línea de R3 se mueve en forma paralela hacia abajo hasta la intersección del punto solución D(3, 1.5) se establece el límite inferior del intervalo de factibilidad y si movemos hacia la arriba de R3 hasta el punto solución no se puede interceptarlo, por lo cual este límite derecho es ∞ en el intervalo superior de factibilidad.



Luego, tomamos el valor inferior D(3, 1.5) y reemplazamos a la izquierda y como no fue posible interceptarlo en el otro sentido su límite es infinito:

$-X_1 + X_2 \leq b_3$ (R3)

$-X_1 + X_2 \leq b_3 \leq -X_1 + X_2$

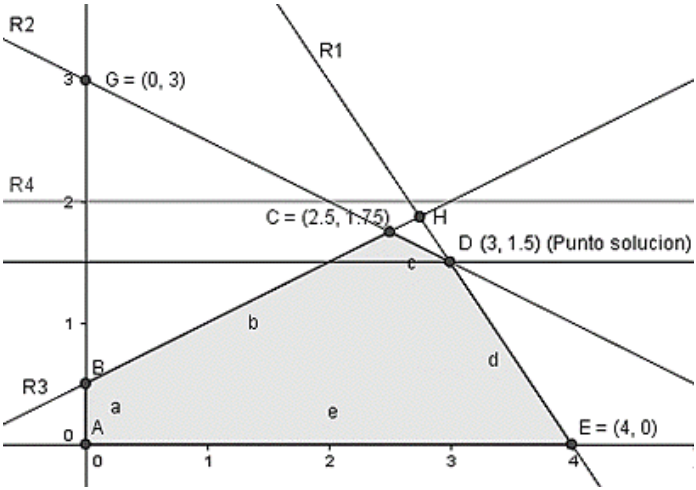
$-3 + 1.5 \leq b_3 \leq \infty$

$-1.5 \leq b_3 \leq \infty$ (No se puede considerar un valor negativo)

$0 \leq b_3 \leq \infty$

Para este intervalo la solución no varía y tampoco la función objetiva

Y por último determinamos la Restricción No activa 4, la línea de R4 se mueve en forma paralela hacia su izquierda hasta la intersección del punto solución D(3, 1.5) se establece el límite inferior del intervalo de factibilidad y si movemos hacia la derecha de R4 hasta el punto solución no se puede interceptarlo, por lo cual este límite derecho es ∞ en el intervalo superior de factibilidad.



Luego, tomamos el valor D(3, 1.5) y reemplazamos a la izquierda y como no fue posible interceptarlo a la derecha su límite es infinito:

$X_2 \leq 2$ (4)

$X_2 \leq b_4 \leq X_2$

$1.5 \leq b_4 \leq \infty$

$375 \leq b_4 \leq \infty$

Para este intervalo la solución no varía y tampoco la función objetiva

Del ejemplo:

Maximizar: $Z = 100\ X_1 + 120\ X_2$

Sujeto a:

$$4\ X_1 + 8\ X_2 \leq 480 \qquad (1)$$

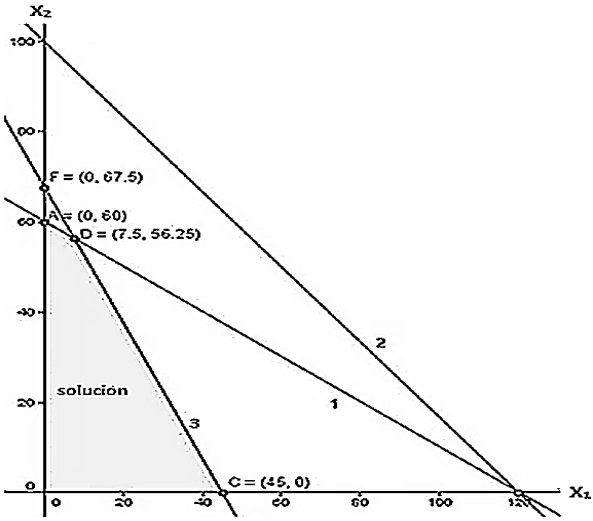
$$5\ X_1 + 6\ X_2 \leq 600 \qquad (2)$$

$$12\ X_1 + 8\ X_2 \leq 540 \qquad (3)$$

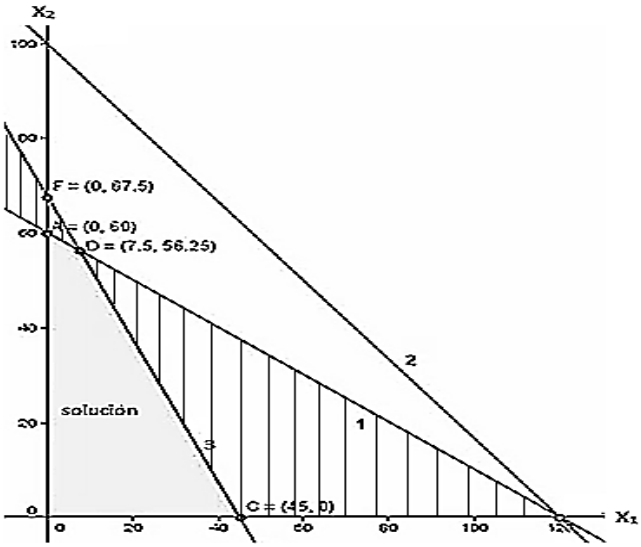
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Solución: $X_1 = 7.5$, $X_2 = 56.25$ y $Z = 7500$

Su grafico es:



Intervalos de optimalidad: Si iniciamos con el análisis del coeficiente de X_1 en la función objetivo: $Z = 100\ X_1 + 120\ X_2$, al cual denominaremos C_1, entonces: $Z = C_1X_1 + 120\ X_2$ que es una recta que pasa por el vértice D (7.5, 56,25) que corresponde a la solución y lo que puede variar es su pendiente en la zona rayada en el gráfico:



Es decir $Z = C_1\ X_1 + 120\ X_2 = K$, es una recta que pasa por el vértice de la solución óptima, que puede variar su inclinación dentro del cono rayada. Entonces la pendiente de la recta de la función objetiva debe estar dentro del intervalo de las pendientes de la restricción 3 a la restricción 1, como se puede observar en el grafico anterior. Analíticamente tenemos:

Para C_1 y usando la fórmula de la pendiente de una recta $m = -\frac{A}{B}$

La pendiente de la recta restricción (3) $12\ X_1 + 8\ X_2 = 540$, seria: $m_3 = -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2}$

La pendiente de la función objetivo $C_1 X_1 + 120 X_2 = K$, seria: $m_3 = -\frac{C_1}{120}$

La pendiente de la recta restricción (1) $4 X_1 + 8 X_2 = 4800$, seria: $m_3 = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$

Entonces nos queda:

$-\frac{3}{2} \leq -\frac{C_1}{120} \leq -\frac{1}{2}$ cambiando de signo y ordenando tenemos:

$\frac{1}{2} \leq \frac{C_1}{120} \leq \frac{3}{2}$ Simplificando

$60 \leq C_1 \leq 180$

La solución óptima no varía, si el valor del coeficiente varia en el intervalo, $60 \leq C_1 \leq 180$. Pero la función objetivo si va a variar.

Para C_2, el proceso es muy similar:

La pendiente de la recta restricción (3) $12 X_1 + 8 X_2 = 540$, seria: $m_3 = -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2}$

La pendiente de la función objetivo $100 X_1 + C_2 X_2 = K$, seria: $m_3 = -\frac{100}{C_2}$

La pendiente de la recta restricción (1) $4 X_1 + 8 X_2 = 4800$, seria: $m_3 = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$

Entonces nos queda:

$-\frac{3}{2} \leq -\frac{100}{C_2} \leq -\frac{1}{2}$ Cambiando de signo y ordenando tenemos:

$\frac{1}{2} \leq \frac{100}{C_2} \leq \frac{3}{2}$ Simplificando

$C_2 \leq 200 \leq 3C_2$

$C_2 \leq 200$ y $3C_2 \geq 200$ despejando

$C_2 \leq 200$ y $C_2 \geq \frac{200}{3}$ ordenando

$\frac{200}{3} \leq C_2 \leq 200$

La solución óptima no varía, si el valor del coeficiente varía en el intervalo $\frac{200}{3} \leq C_2 \leq 200$ obtenido. Pero la función objetivo si va a variar.

<u>Intervalo de factibilidad para el lado derecho de las restricciones</u>:

Del ejemplo:

Maximizar: $Z = 100\ X_1 + 120\ X_2$

Sujeto a:

$$4\ X_1 + 8\ X_2 \leq 480 \qquad (1)$$

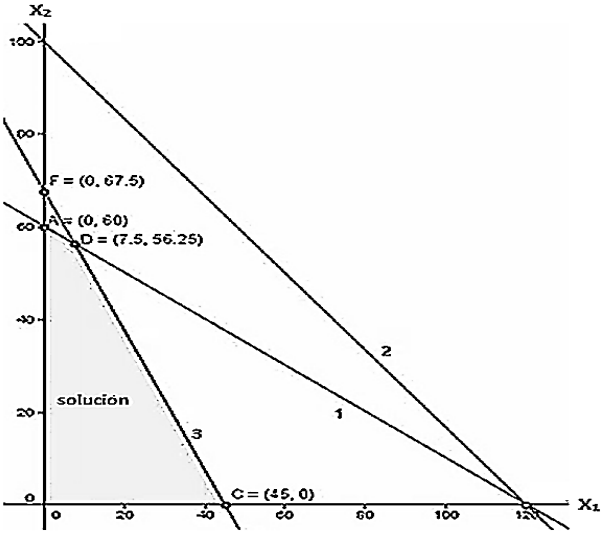
$$5\ X_1 + 6\ X_2 \leq 600 \qquad (2)$$

$$12\ X_1 + 8\ X_2 \leq 540 \qquad (3)$$

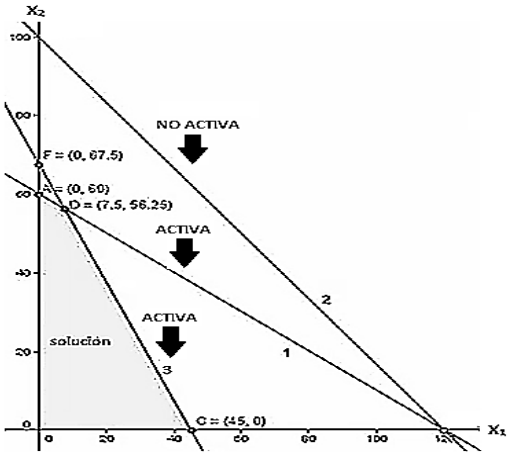
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Solución: $X_1 = 7.5$, $X_2 = 56.25$ y $Z = 7500$

Su grafico es:



La idea es determinar el intervalo que se puede modificar el lado derecho de una restricción. Para este análisis de sensibilidad del lado derecha de una restricción debemos identificar las activas de las no activas. Las restricciones son activas si pasan por el vértice de la solución, en caso contrario es no activa, como podemos ver en el gráfico.



$4\ X_1 + \quad 8\ X_2 \leq 480$ (1) Restricción activa

$5\ X_1 + \quad 6\ X_2 \leq 600$ (2) Restricción No activa

$12\ X_1 + \quad 8\ X_2 \leq 540$ (3) Restricción activa

Análisis de la restricción activa 1: Tomamos la restricción 1.

$4X_1 + 8X_2 \leq 480$ (1), para lo cual reemplazamos el lado derecho con b_1

$4X_1 + 8X_2 \leq b_1$ (1)

Luego, tomamos el valor inferior C(45, 0) y reemplazamos a la izquierda y F(0, 67.5) a la derecha del siguiente intervalo:

$4X_1 + 8X_2 \leq b_1 \leq 4X_1 + 8X_2$

$4(45) + 8(0) \leq b_1 \leq 4(0) + 8(67.5)$

$180 \leq b_1 \leq 540$

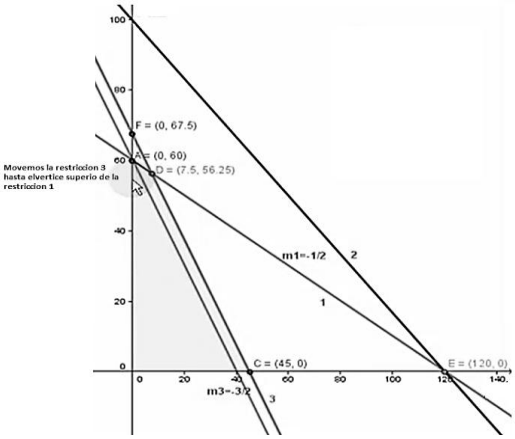
Para este intervalo la solución varia y también la función objetiva.

Análisis de la restricción activa 3: Tomamos la restricción 3.

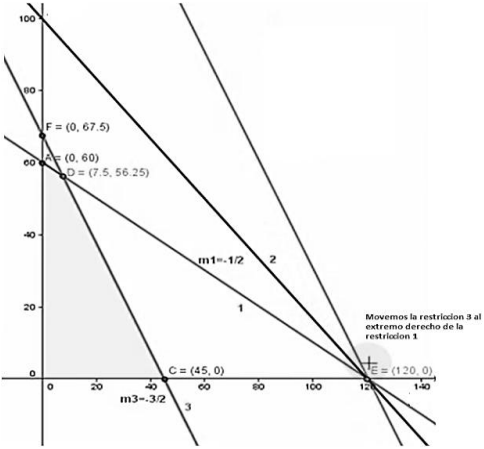
$12X_1 + 8X_2 \leq 540$ (3), para lo cual reemplazamos el lado derecho con b_3

$12X_1 + 8X_2 \leq b_3$ (3)

Primero, movemos la restriccion 3 en forma paralela hasta el valor a la izquierda A (0, 60) de la restriccion activa 1.



Segundo, movemos la restricción 3 en forma paralela hasta el valor superior E (120, 0) de la otra restricción 1.



Luego, tomamos el valor inferior A (0, 60) y reemplazamos a la izquierda y E (120, 0) a la derecha del siguiente intervalo:

$12X_1 + 8X_2 \leq b_3 \leq 12X_1 + 8X_2$

$12(0) + 8(60) \leq b_3 \leq 12(120) + 8(0)$

$480 \leq b_3 \leq 1440$

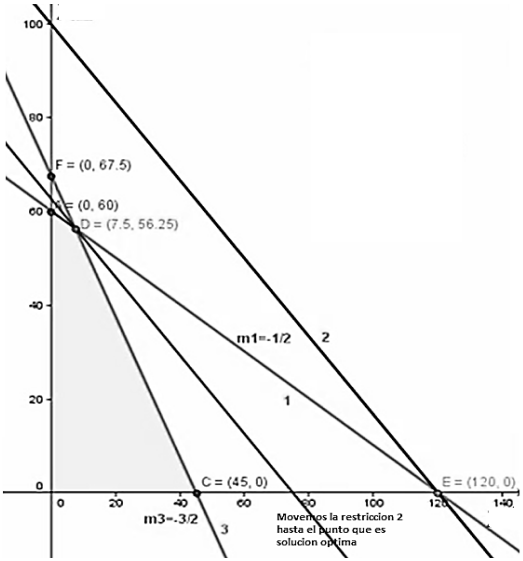
Para este intervalo la solución varia y también la función objetiva.

Análisis de la restricción No activa 2: Tomamos la restricción 2.

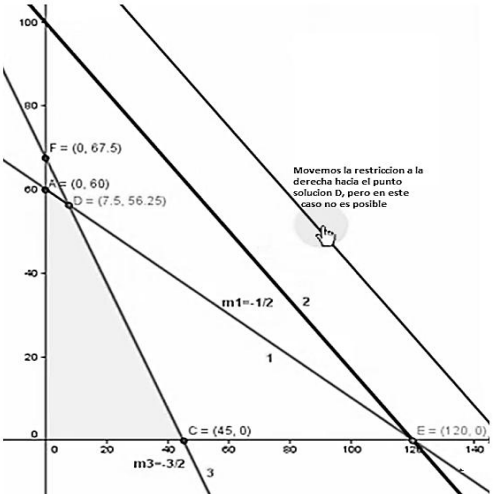
$5X_1 + 6X_2 \leq 600$ (2), para lo cual reemplazamos el lado derecho con b_2

$5X_1 + 6X_2 \leq b_2$ (2)

Primero, movemos la restriccion 2 en forma paralela hasta el valor hacia la izquierda del punto solucion D(7.5, 56.25)



Segundo, movemos la restriccion 2 en forma paralela hasta el valor a la derecha del punto solucion D(7.5, 56.25), pero en este caso no es posible interceptarlo



Luego, tomamos el valor D(7.5, 56.25) y reemplazamos a la izquierda y como no fue posible interceptarlo su límite derecho es infinito:

$5X_1 + 6X_2 \leq b_3 \leq 5X_1 + 6X_2$

$5(7.5) + 6(56.25) \leq b_3 \leq \infty$

$375 \leq b_3 \leq \infty$

Para este intervalo la solución no varía y tampoco la función objetiva.

Precio Sombra

Un precio sombra es la cantidad que el valor óptimo de la función objetivo cambiaría si el lado derecho de una restricción aumentara en una unidad. Se determina como la razón o tasa de cambio de la función objetivo con respecto al cambio en una unidad del lado derecho:

$$PS = \frac{FO(Max) - FO(Min)}{R_i(Max) - R_i(Min)}$$

También podemos definirla como la razón entre la variación de la función objetivo y la de la restricción con respecto a los límites de su respectivo intervalo de factibilidad. Una forma de interpretarla es como la cantidad de dinero adicional que se ganara, si la restricción del lado derecho es aumentada en una unidad, permaneciendo dentro de los límites de factibilidad, siempre y cuando la variable de holgura sea cero en la solución óptima, caso contrario el precio sombra es cero, pues el recurso no se ha agotado. Por ejemplo, un precio sombra igual a cero para una restricción indicaría que un aumento en los recursos, no tiene efecto sobre la solución óptima. Además, una restricción ≥ tendrá un precio sombra negativo, ≤ su precio es positivo y del tipo

= su valor puede ser positivo, negativo o cero.

Otra manera de interpretar el precio sombra es como la contribución marginal de un recurso, cuando se incrementa la función objetivo debido al incremento en una unidad de un recurso saturado. El precio sombra es el máximo precio que conviene para agregar por una unidad de un recurso saturado. Ese precio es igual a la contribución marginal del recurso ya que no conviene pagar por esa unidad adicional más de lo que se incrementa la función objetivo. Es decir,

que el costo de incrementar en una unidad un recurso saturado deberá ser inferior a la contribución marginal para que se justifique hacerlo. Si un recurso no se utiliza totalmente (no está saturado) su precio sombra es cero, porque no tiene sentido pagar por un recurso que sobra.

El precio sombra es válido para un rango particular de cambios en la constante del lado derecho. El rango válido para cada precio sombra se puede determinar mediante otro tipo de análisis posterior a lo óptimo. Para este tipo de análisis nos referimos en el siguiente ejemplo.

Un productor tabaquero posee 85 ha de terreno para plantar dos variedades de tabacos Virginia y Procesado. La variedad Virginia tiene un ingreso de $9.600 por cada ha y necesita 3 horas/ha de uso de maquinaria y 80 horas/ha de mano de obra. Además, el Estado limita su explotación a 30 ha como máximo. La variedad Procesado tiene un ingreso de $7.500 por cada ha y utiliza 2 horas/ha de uso de maquinaria y 60 horas/ha de mano de obra. La cooperativa local le ha asignado un máximo de 190 horas de uso de maquinaria y solo se dispone de 5.420 horas de mano de obra a $12 /hora. Formule y resuelva gráficamente un modelo de Programación Lineal que permita determinar cuánto se debe plantar de cada variedad de tabaco de manera de maximizar la utilidad total. Adicionalmente haga un análisis de sensibilidad.

Solución: En primer lugar definimos el modelo de optimización para este problema. Esto consiste en identificar las variables de decisión, función objetivo y restricciones.

X_1 = Número de hectáreas a plantar de la variedad Virginia

X_2 = Número de hectáreas a plantar de la variedad Procesado

Max Utilidad $U = (9.600 – 960)\ X_1 + (7.500 – 720)\ X_2$

$U = 8.640\ X_1 + 6.780\ X_2$

Sujeta: $X_1 \leq 30$ (1) limitación de sembrado de la variedad de tabaco Virginia

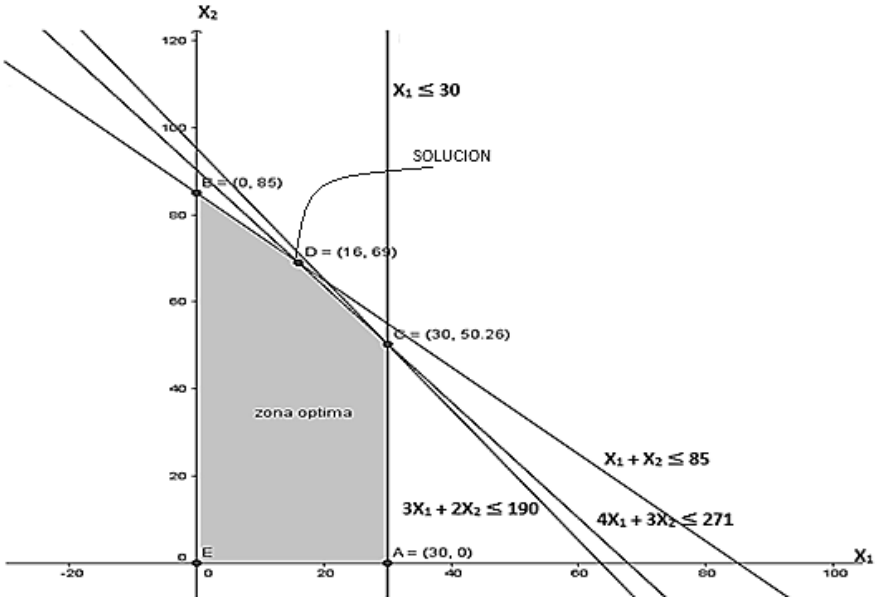
$X_1 + X_2 \leq 85$ (2) Disponibilidad de tierra

$3X_1 + 2X_2 \leq 190$ (3) Disponibilidad de horas de maquinaria

$80X_1 + 60X_2 \leq 5.420$ puedo simplificar y tenemos: $4X_1 + 3X_2 \leq 271$ (4) Mano de obra

$X1, X2 \geq 0$

Siguiendo el mismo proceso anterior y usando GeoGebra, obtenemos el grafico y el vértice solución.



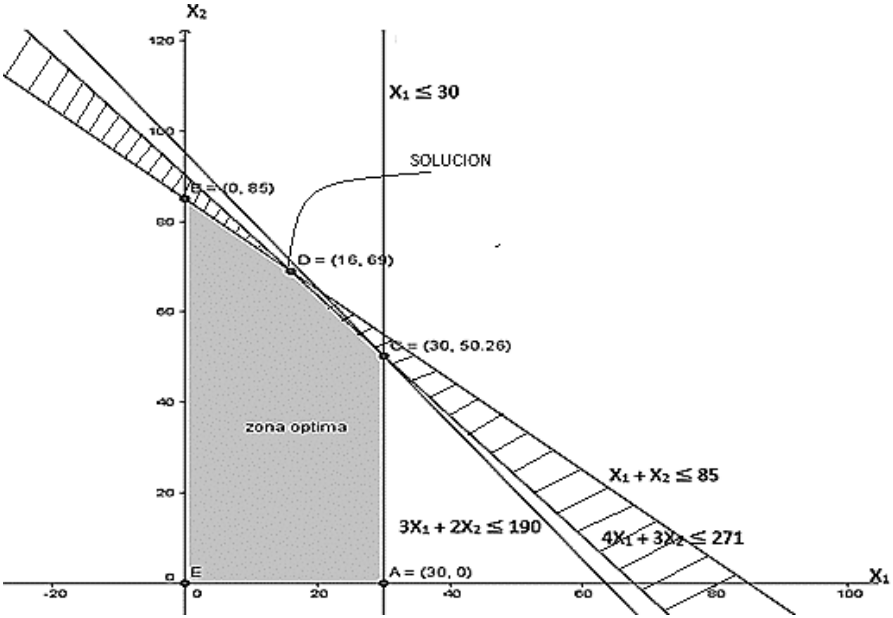
De donde la solución es $X_1 = 16$ y $X_2 = 69$, lo cual reporta un valor en la función objetivo de U = 8.640*(16) + 6.780(69) = 606.060, que corresponde al valor máximo. A continuación procedemos al análisis de sensibilidad requerido.

Primero, determinamos los intervalos de variación de los coeficientes de la Función Objetivo:

Del modelo, la función objetivo es: $U = 8.640\ X_1 + 6.780\ X_2$, de donde X_1 = Número de hectáreas a plantar de la variedad Virginia y X_2 = Número de hectáreas a plantar de la variedad Procesado.

Inicialmente procedemos a determinar cuánto podría variar la utilidad por hectárea del tabaco Virginia, manteniendo constante la utilidad por hectárea del tabaco procesado, de forma que la actual solución óptima no cambie. Y al final determinar el intervalo de variación de la utilidad total.

Si iniciamos con el análisis del coeficiente de X_1 en la función objetivo: $Z = 8.640\ X_1 + 6.780\ X_2$, al cual denominaremos C_1, entonces: $Z = C_1X_1 + 6.780\ X_2$ que es una recta que pasa por el vértice D (16, 69) que corresponde a la solución y lo que puede variar es su pendiente en la zona rayada en el gráfico:



Es decir Z = C_1 X_1 + 6.780 X_2 = K, es una recta que pasa por el vértice de la solución óptima, que puede variar su inclinación dentro del cono rayada. Entonces la pendiente de la recta de la función objetiva debe estar dentro del intervalo de las pendientes de la restricción 2 a la restricción 4, como se puede observar en el grafico anterior.

Para C_1 tenemos:

La pendiente de la recta restricción (2) $X_1 + X_2 = 85$, seria: $m_3 = -\frac{1}{1} = -1$

La pendiente de la función objetivo $C_1X_1 + 6.780\ X_2 = K$, seria: $m_3 = -\frac{C_1}{6780}$

La pendiente de la recta restricción (4) $4X_1 + 3X_2 = 271$, seria: $m_3 = -\frac{4}{3}$

Entonces nos queda:

$-\frac{4}{3} \leq -\frac{C_1}{6.780} \leq -1$, cambiando de signo

$\frac{4}{3} \geq \frac{C_1}{6.780} \geq 1$

$9.040 \geq C_1 \geq 6.780$

$6.780 \geq C_1 \geq 9.040$

La solución óptima no varía, si el valor del coeficiente varia en el intervalo, $6.780 \leq C_1 \leq 9.040$. Pero la función objetivo si va a variar. Reemplazando estos valores y los de la solución óptima $X_1 = 16$ y $X_2 = 69$ en la función objetivo:

Solución:

$U = 6.780X_1 + 6.780X_2 = 6.780(16) + 6.780(69) = 576.300$

$U = 9.040X_1 + 6.780X_2 = 9.040(16) + 6.780(69) = 612.460$

En este caso la utilidad por hectárea del tabaco Virginia puede variar entre \$6.780 y \$9.040, de tal forma que el actual nivel de producción (solución óptima) sería el mismo. Lo anterior permite concluir que el intervalo de variación para la utilidad total será $576.300 \leq U \leq 612.460$.

A continuación, procedemos a determinar cuánto podría variar la utilidad por hectárea del tabaco Procesado, manteniendo constante la utilidad por hectárea del tabaco Virginia, de forma que la actual solución óptima no cambie. Y al final determinar el intervalo de variación de la utilidad total.

Para C_2 tenemos:

La pendiente de la recta restricción (2) $X_1 + X_2 = 85$, seria: $m_3 = -\frac{1}{1} = -1$

La pendiente de la función objetivo $8.640X_1 + C_2X_2 = K$, seria: $m_3 = -\frac{8640}{C_2}$

La pendiente de la recta restricción (4) $4X_1 + 3X_2 = 271$, seria: $m_3 = -\frac{4}{3}$

Entonces nos queda:

$-\frac{4}{3} \leq -\frac{8640}{C_2} \leq -1$, cambiando de signo

$\frac{4}{3} \geq \frac{8640}{C_2} \geq 1$

$6.480 \geq C_2 \geq 8.640$

La solución óptima no varía, si el valor del coeficiente varia en el intervalo, $6.480 \leq C_1 \leq 8.640$. Pero la función objetivo si va a variar. Reemplazando estos valores en la función objetivo:

Solución: $X_1 = 16$ y $X_2 = 69$

$U = 8.640X_1 + 6.480X_2 = 8.640\ (16) + 6.480(69) = 585.360$

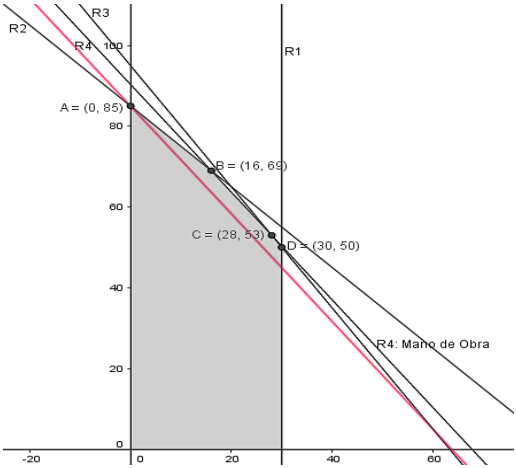
$U = 8.640X_1 + 8.640X_2 = 8.640\ (16) + 8.640(69) = 734.400$

En este caso la utilidad por hectárea del tabaco Virginia puede variar entre \$6.480 y \$8.640, de tal forma que el actual nivel de producción (solución óptima) sería el mismo. Lo anterior permite concluir que el intervalo de variación para la utilidad total será $585.360 \leq U \leq 734.400$.

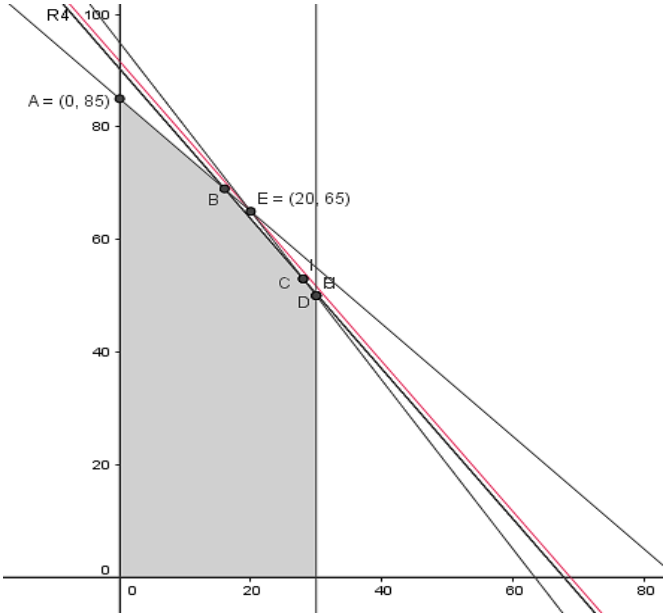
A continuación, se determinara el precio sombra de la restricción referente a la mano de obra. Para lo cual nos preguntamos: si se pudiese contratar más mano de obra disponible en el mercado, ¿Cuántas horas de mano de obra en total estaría dispuesto a utilizar? ¿Cuál sería el aporte adicional de esas horas extras que utilizaría en términos monetarios? Esto se puede responder haciendo uso del concepto de Precio Sombra.

Para calcular gráficamente el precio sombra necesitamos identificar la máxima y mínima variación para el lado derecho de la restricción de mano de obra que permita garantizar que se conserva la actual base óptima (restricciones activas originales). En este sentido en el caso de *aumentar* el lado derecho de dicha restricción la solución óptima podrá ser encontrada manteniendo las restricciones activas (e incorporando una adicional) hasta la coordenada (20, 65) que es donde se interceptan la segunda y tercera restricción. En el caso de *disminuir* la disponibilidad de horas en mano de obra se mantiene la base óptima hasta el vértice B cuya coordenada es (0, 85).

Al disminuir la disponibilidad de horas en mano de obra se mantiene la base óptima hasta el vértice B cuya coordenada es (0, 85).



Al aumentar el lado derecho de dicha restricción la solución óptima podrá ser encontrada manteniendo las restricciones activas hasta la coordenada (20, 65).



Reemplazamos el valor inferior (0, 85) y el superior (20, 65) en la función objetivo:

U (20, 65) = 8.640 X_1 + 6.780 X_2 = 8640(20) + 6780(65) =172.800 + 440.700 = 613.500

U (0, 85) = 8.640 X_1 + 6.780 X_2 = 8640(0) + 6780(85) = 0 + 576.300 = 576.300

Reemplazamos el valor inferior (0, 85) y el superior (20, 65) en la restricción 4, que corresponde a la mano de obra:

$80X_1 + 60X_2 \leq 5.420$

$R_4 = 80X_1 + 60X_2$

$R_4(20, 65)$ = 80X_1 + 60X_2 = 80(20) + 60(65) = 1600 + 3900 = 5.500

$R_4(0, 85)$ = 80X_1 + 60X_2 = 80(0) + 60(85) = 0 + 5100 = 5.100

De esta forma se obtiene el precio sombra de la siguiente forma:

$$PS = \frac{U(20,65) - U(0,85)}{R_4(20,65) - R_4(0,85)} = \frac{613.500 - 576.300}{5.500 - 5.100} = \frac{37.200}{400} = \$93$$

En consecuencia, el lado derecho de la restricción 4 (disponibilidad de mano de obra) puede variar entre [5.100, 5.500] y se conservan las actuales restricciones activas. Adicionalmente dado que en el óptimo actual se utilizan 5.420 horas de mano de obra se deben contratar 80 horas adicionales (de modo de alcanzar las 5.500 horas). Luego, la variación de 80 horas adicionales implicaría un aumento en la utilidad total de 80*$93 = $7.440. Este mismo análisis puede realizarse con las otras restricciones.

Análisis de sensibilidad haciendo uso GeoGebra

El análisis de sensibilidad se puede abordar de manera gráfica o analítica, en el caso de GeoGebra se aplicará el análisis gráfico. Este análisis se realizará a través de los deslizadores, una herramienta ya utilizada anteriormente que deben ser vinculados en los siguientes parámetros del planteo: coeficientes de la función objetivo de las variables de decisión y la disponibilidad de los recursos.

A los fines de explicar paso a paso el desarrollo de la actividad a través del software, se propone el siguiente problema lineal:

Función optima:

Maximizar Z = 100 x + 120 y (Beneficio Total)

Restricciones:

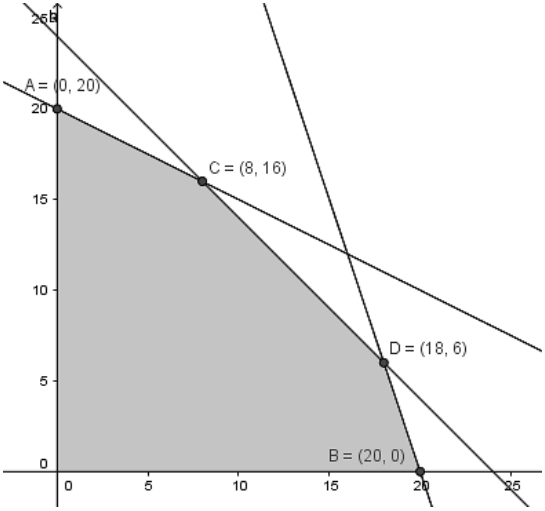
$2x + 4y \leq 80$ (pies de madera)

$12x + 4y \leq 240$ (horas de carpintería)

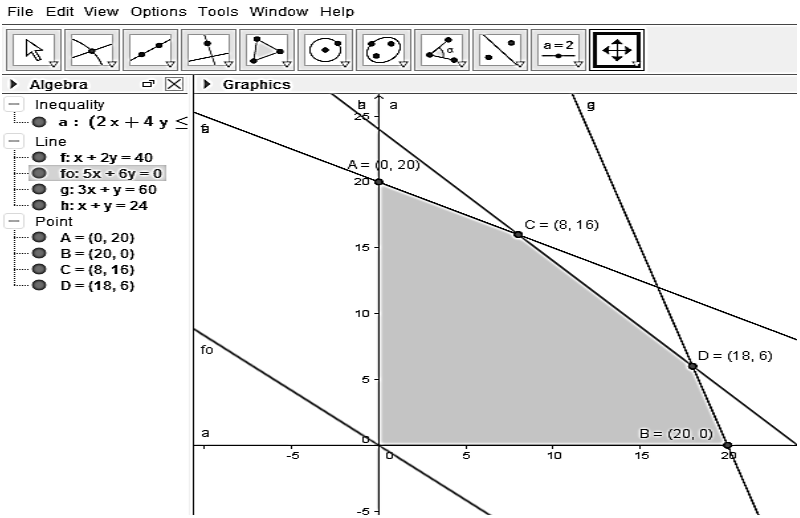
$6x + 6y \leq 144$ (horas de terminación)

$x, y \geq 0$

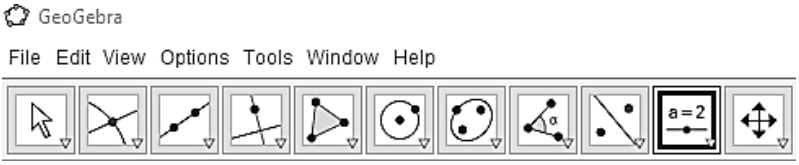
Se procede a graficar usando Geogebra, siguiendo las instrucciones dadas anteriormente.



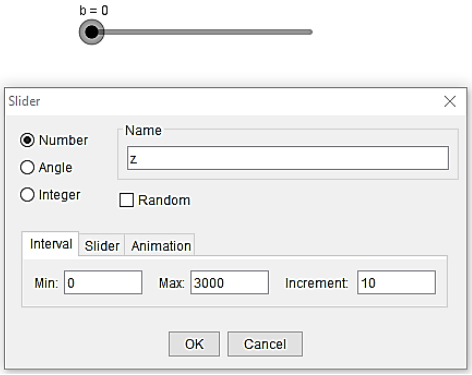
Se procede a graficar la función objetivo, para lo cual en la barra de entrada se ingresa, fo: 100x + 120y = 0 y aparecerá la recta correspondiente, en este caso, de color negro. A los fines de distinguirlo de mejor manera se puede cambiar su color y asignarle el rojo.



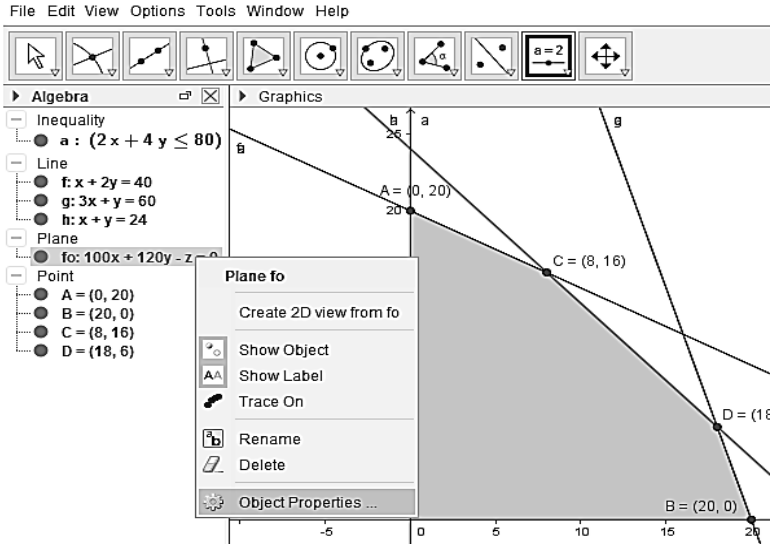
Con el objeto de desplazar la función objetivo (FO) y así asignarle distintos valores se usa la herramienta denominada deslizador que permite animar la gráfica y al desplazarlo se modificarán los objetos que de él dependan. Finalmente, se activa presionando el penúltimo botón ubicado en la barra de herramientas.



Se abre la pantalla Deslizador asignándose el nombre “z”, un valor mínimo (0), un valor máximo (3000) y un incremento de 10 que significa que el deslizador variará de 10 en 10. Los valores pueden ser ajustados todas las veces que fuere necesario.

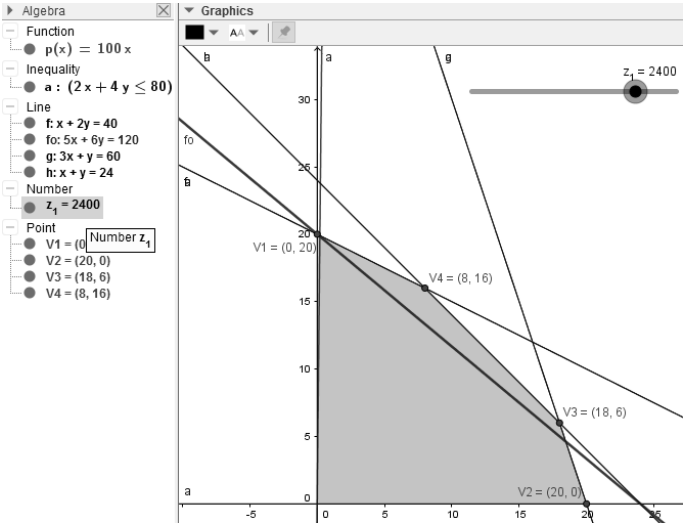


El siguiente paso es relacionar el deslizador con la FO, para ello en las preferencias de la función 100x + 120y = 0 y se reemplaza 0 por z (nombre que se le dio al deslizador), por lo tanto el resultado será 100x + 120y = z o 100x + 120y – z =0

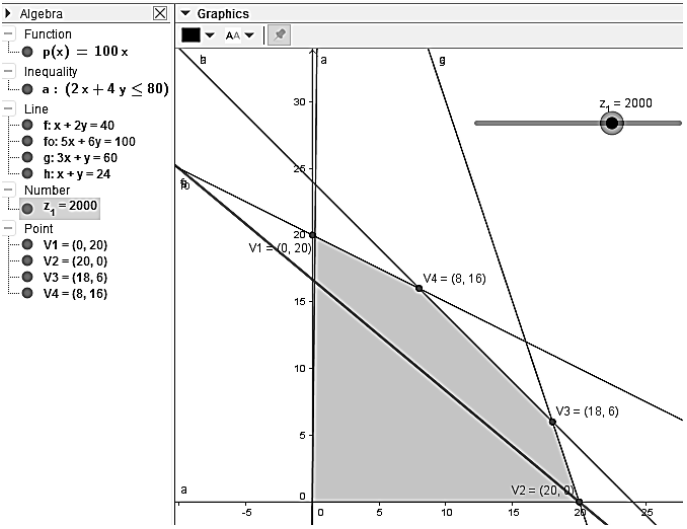


Para encontrar la solución debemos trasladar el deslizador en el sentido de optimidad deseado, en este caso hacia la derecha ya que hablamos de una función de beneficio.

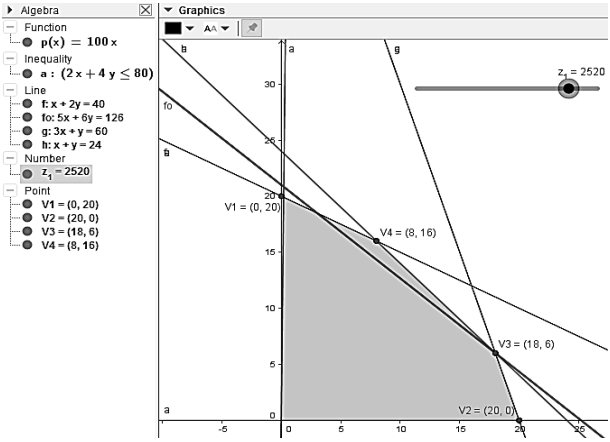
Movemos la recta de la FO hasta el vértice V1(0, 20) y obtenemos el valor de Z_1=2400.



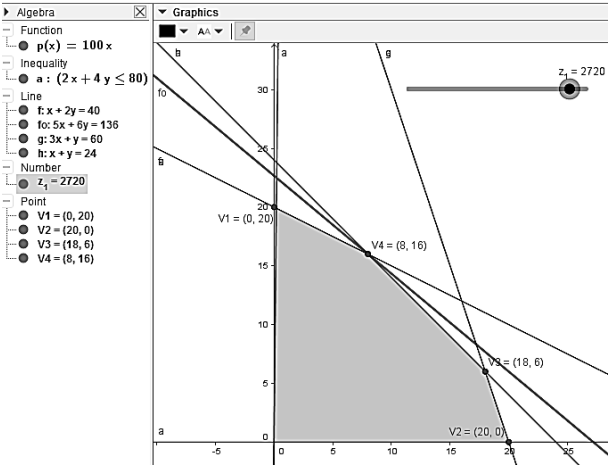
Movemos la recta de la FO hasta el vértice V2(20, 0) y obtenemos el valor de Z_1=2000.



Movemos la recta de la FO hasta el vértice V3(18, 6) y obtenemos el valor de Z_1=2520.



Movemos la recta de la FO hasta el vértice V4(8, 16) y obtenemos el valor de Z_1=2720.



Finalmente, la solución es la mayor de todas: V4(8, 16), z = 2720.

Determinación de intervalo de optimalidad

Se grafica la función objetivo (FO): $Z = 100x + 120y$ en el punto solución (8, 16) para $z = 2720$. Hacemos $100x + 120y = 2720$. Se usa la herramienta denominada deslizador que permite animar la gráfica y al desplazarlo se modificarán los objetos que de él dependan. En este caso debemos variar la pendiente de la función óptima desde la pendiente de la restricción 1 hasta la 2, sin mover del punto solución.

Cambios en los valores del lado derecho de las restricciones

Tomando las restricciones del ejemplo anterior, procedemos a determinar en forma gráfica los intervalos de factibilidad de cada una de las restricciones.

Inicialmente establecemos cuales son las restricciones activas y no activas. (activas las que pasan por el punto solución, en caso contrario no activas)

R1: $2x + 4y \leq 80$ (Activa)

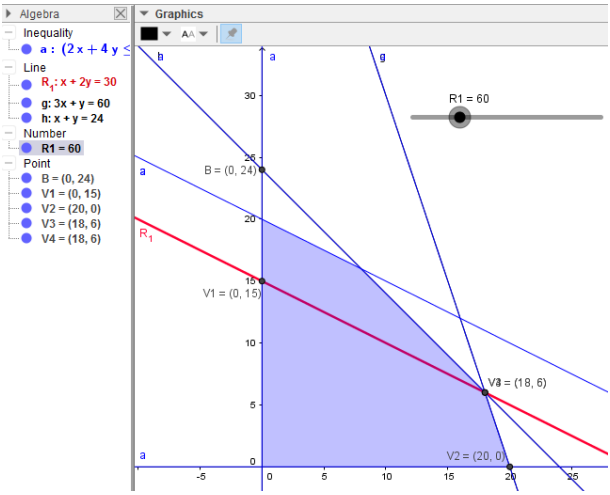
R2: $12x + 4y \leq 240$ (Activa)

R3: $6x + 6y \leq 144$ (No activa)

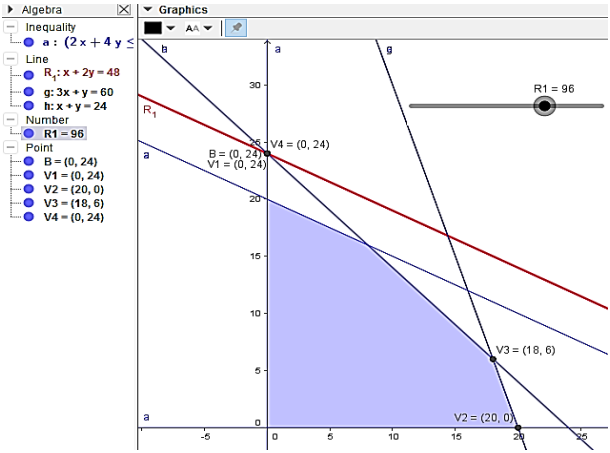
En este apartado se verá que sucede con el problema cuando varían los valores de los términos independientes de las restricciones. De la misma manera que en el caso de los parámetros de la FO, ahora se incorporarán deslizadores a los b_i.

Límite de factibilidad del lado derecho de R1: $2x + 4y \leq 80$

El Límite inferior del lado derecho de la restricción R1 es 60.



El Límite inferior del lado derecho de la restricción R1 es 96. El intervalo de factibilidad queda: $60 \leq b_1 \leq 96$.



A partir del intervalo de factibilidad de la restriccion1, podemos determinar el precio sombra de la misma. El proceso a seguir inicia:

Reemplazando el valor inferior (18, 6) y el superior (0, 24) en la función objetivo (ver gráfico anterior):

U (18, 6) = 100 x + 120y = 100(18) + 120(6) =1800 + 720 = 2520

U (0, 24) = 100 x + 120y = 100(0) + 120(24) = 0 + 2880= 2880

Luego, reemplazamos el valor inferior (18, 6) y el superior (0, 24) en la restricción 1, que corresponde a la disponibilidad de pies de madera:

R_1: 2x + 4y ≤ 80

R_1 = 2x + 4y

$R_1(18,6)$ = 2x + 4y = 2(18) + 4(6) = 36 + 24 = 60

$R_1(0,24)$ = 2x + 4y = 2(0) + 4(24) = 0 + 96 = 96

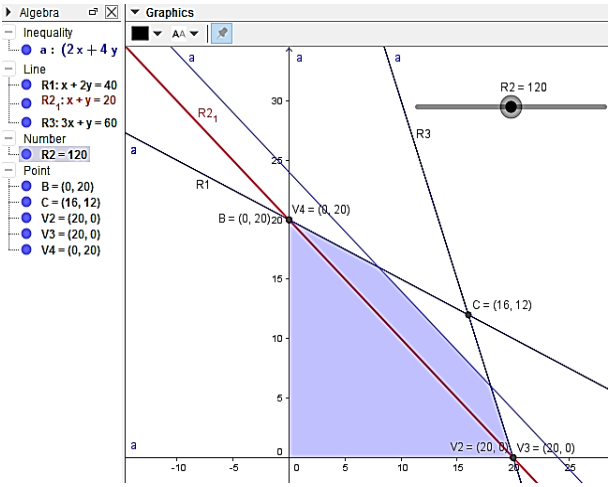
De esta forma se obtiene el precio sombra de la siguiente forma:

$$PS = \frac{U(0,24) - U(18,6)}{R_1(0,24) - R_1(18,6)} = \frac{2880 - 2520}{96 - 60} = \frac{360}{36} = \$10$$

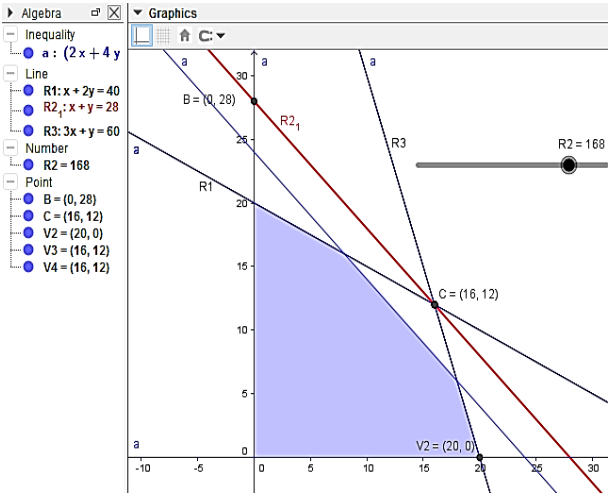
En consecuencia, el lado derecho de la restricción 1 (disponibilidad de pies de madera) puede variar entre [60, 96] y se conservan las actuales restricciones activas. Adicionalmente dado que en el óptimo actual se utilizan 80 pies de madera se deben contratar 16 pies de madera adicionales (de modo de alcanzar los 96 pies). Luego, la variación de 16 pies adicionales implicaría un aumento en la utilidad total de 16*$10 = $160. Este mismo análisis puede realizarse con las otras restricciones.

Límite de factibilidad del lado derecho de R2: 6x + 6y ≤ 144

El Límite inferior del lado derecho de la restricción R2 es 120.



El Límite inferior del lado derecho de la restricción R2 es 168. El intervalo de factibilidad queda: $120 \leq b_2 \leq 168$.



A partir del intervalo de factibilidad de la restriccion2, podemos determinar el precio sombra de la misma. El proceso a seguir inicia, reemplazando el valor inferior (0, 20) y el superior (16, 12) en la función objetivo (ver gráfico anterior):

U (0, 20) = 100 x + 120y = 100(0) + 120(20) = 0 + 2400 = 2400

U (16, 12) = 100 x + 120y = 100(16) + 120(12) = 1600 + 1440 = 2880

Luego, reemplazamos el valor inferior (0, 20) y el superior (16, 12) en la restricción 2, que corresponde a la disponibilidad de pies de madera:

R_2: 6x + 6y ≤ 144

R_2 = 6x + 6y

$R_2(0, 20)$ = 6x + 6y = 6(0) + 6(20) = 0 + 120 = 120

$R_2(16, 12)$ = 6x + 6y = 6(16) + 6(12) = 96 + 72 = 168

De esta forma se obtiene el precio sombra de la siguiente forma:

$$PS = \frac{U(16,12) - U(0,20)}{R_2(16,12) - R_2(0,20)} = \frac{2880 - 2400}{168 - 120} = \frac{480}{48} = \$10$$

En consecuencia, el lado derecho de la restricción 2 (disponibilidad de horas de carpintería) puede variar entre [120, 168] y se conservan las actuales restricciones activas. Adicionalmente dado que en el óptimo actual se utilizan 144 de carpintería se deben contratar 24 horas adicionales adicionales (de modo de alcanzar las 168 horas). Luego, la variación de 24 horas adicionales implicaría un aumento en la utilidad total de 24*$10 = $240. Este mismo análisis puede realizarse con las otras restricciones.

Un procedimiento similar usamos para determinar el intervalo de factibilidad de la restricción R3: 6x + 6y ≤ 144. Primero, movemos la restriccion 3 en forma paralela hasta el valor hacia la izquierda del punto solucion (8, 16), luego movemos la restriccion 3 en forma

paralela hasta el valor a la derecha del punto solucion, pero en este caso no es posible interceptarlo, valor que se torna indefinido.

$6x + 6y \leq b_3 \leq \infty$

$6(8) + 6(16) \leq b_3 \leq \infty$

$48 + 96 \leq b_3 \leq \infty$

$144 \leq b_3 \leq \infty$

Note que, el intervalo es abierto a la derecha. En estos casos el precio sombra es cero.

UNIDAD IV. SOLUCION ANALITICA DE MODELOS DE PROGRAMACION LINEAL

Método Simplex

Es un método genérico de solución de problemas lineales, desarrollado por George Dantzig en 1947. Como tal, el método simplex es un procedimiento algebraico, pero puede entenderse más fácilmente como un método geométrico.

Requerimientos del método simplex

Hay tres requerimientos para resolver un problema de programación lineal mediante el método simplex.

Se deben expresar como ecuaciones todas las restricciones.

El lado derecho de una restricción no puede ser negativo.

Todas las variables se limitan a valores no negativos

Algoritmo del método simplex

El método símplex puede resumirse por la sucesión de los siguientes pasos:

Paso 1 Definimos las variables de holgura no negativas que transformen las desigualdades en ecuaciones.

Paso 2 Construimos la tabla símplex.

Paso 3 Seleccionamos la variable de entrada con base en el indicador positivo más grande.

Paso 4 Calculamos las razones de los elementos de la última columna de la tabla a los elementos de la columna de la variable de entrada. El cociente no negativo más pequeño determina la variable de salida.

Paso 5 Efectuamos operaciones entre renglones de la tabla para transformar la columna encabezada por la variable de entrada a la forma que la columna de la variable de salida tenía antes. Esto debe realizarse sin alterar las columnas encabezadas por las otras variables básicas.

Paso 6 Repetimos los pasos 3, 4 y 5 hasta que ninguno de los indicadores sea positivo. El valor máximo de la función objetivo estará dado entonces por el elemento inferior izquierdo de la tabla.

El método simplex puede aplicarse a problemas que incluyan más de dos variables y cualquier número de desigualdades. Cuando estos números son grandes, es necesario utilizar una computadora con el objetivo de realizar los cálculos; pero las operaciones correspondientes a problemas con tres variables pueden por lo general realizarse a mano sin demasiada dificultad. Para referirnos a este proceso haremos uso de los siguientes ejemplos.

Ejemplo: Determine la solución del siguiente modelo.

Maximizar: $U = 3x_1 + 5x_2$

Restricciones:

$$x_1 \leq 4$$
$$+ 2x_2 \leq 12$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Forma Estándar:

$Z = 3x_1 + 5x_2 + 0H_1 + 0H_2 + 0H_3$

$1x_1 + 0 + 1H_1 + 0 + 0 = 4$

$0 + 2x_2 + 0 + 1H_2 + 0 = 12$

$3x_1 + 2x_2 + 0 + 0 + 1H_3 = 18$

Tabla Inicial: Se colocan los valores de la forma estándar.

	C_j		3	5	0	0	0	b_i/a_{ij}
CVB	Base	b_i	X_1	X_2	H_1	H_2	H_3	
0	H_1	4	1	0	1	0	0	
0	H_2	12	0	2	0	1	0	
0	H_3	18	3	2	0	0	1	
	Z_j	0	0	0	0	0	0	
	C_j - Z_j		3	5	0	0	0	

Se obtiene la suma de los productos con la columna de CVB con cada una de las columnas: b_i, X_1, X_2, H_1, H_2, H_3. Luego se resta C_j - Z_j

0x4 + 0x12 + 0x18 = 0	C_j - Z_j = 3 – 0 = 3
	5 – 0 = 5
0x1 + 0x0 + 0x3 = 0	0 – 0 = 0
0x0 + 0x2 + 0x2 = 0	0 – 0 = 0
0x1 + 0x0 + 0x0 = 0	0 – 0 = 0
0x0 + 0x0 + 0x1 = 0	

De la fila C_j - Z_j, se toma el mayor valor, esta columna divide a todos los valores de b_i y da lugar a b_i/a_{ij} de la cual se toma la menor:

Tabla 1:
ENTRA

	C_j		3	5	0	0	0	b_i/a_{ij}
CVB	Base	b_i	X_1	X_2	H_1	H_2	H_3	
0	H_1	4	1	0°	1	0	0	4/0
0	H_2	12	0	2^*	0	1	0	12/2=6 Menor
0	H_3	18	3	2°	0	0	1	18/2=9
	Z_j	0	0	0	0	0	0	
	C_j - Z_j		3	5	0	0	0	

Se vuelve a formar la tabla: se ingresa 5 y X_2 en vez de 0 y H_2, luego toda la fila se divide para el elemento pívot 2^*

	C_j		3	5	0	0	0	b_i/a_{ij}
CVB	Base	b_i	X_1	X_2	H_1	H_2	H_3	
0	H_1							
5	X_2	12/2=6	0/2=0	$2^*/2=1$	0/2=0	1/2	0/2=0	
0	H_3							
	Z_j							
	C_j - Z_j							

Y nos queda:

	C_j		3	5	0	0	0	b_i/a_{ij}
CVB	Base	b_i	X_1	X_2	H_1	H_2	H_3	
0	H_1	4	1	0	1	0	0	
5	X_2	6	0	1	0	1/2	0	PIVOT
0	H_3	6	3	0	0	-1	1	
	Z_j							
	C_j - Z_j							

A continuación tomamos cada fila y restamos el producto de la fila pívot por el valor semipivot.

$4 – 6x0^o = 4$

$1 – 0x0^o = 1$

$0 – 1x0^o = 0$

$1 – 0x0^o = 1$

$0 – 1/2x0^o = 0$

$0 – 0x0^o = 0$

$18 – 6x2^o = 6$

$3 – 0x2^o = 3$

$2 – 1x2^o = 0$

$0 – 0x2^o = 0$

$0 – 1/2x2^o = -1$

$1 – 0x2^o = 1$

Obtenemos la siguiente tabla:

	C_j		3	5	0	0	0	b_i/a_{ij}
CVB	Base	b_i	X_1	X_2	H_1	H_2	H_3	
0	H_1	4	1	0	1	0	0	
5	X_2	6	0	1	0	1/2	0	PIVOT
0	H_3	6	3	0	0	-1	1	
	Z_j							
	C_j - Z_j							

Se repite el proceso para obtener Z_j y C_j - Z_j. Luego repetimos el proceso para encontrar la fila pívot y semipivot.

Tabla 2: ENTRA

	C_j		3	5	0	0	0	b_i/a_{ij}
CVB	Base	b_i	X_1	X_2	H_1	H_2	H_3	
0	H_1	4	1^O	0	1	0	0	4/1=4
5	X_2	6	0°	1	0	1/2	0	6/0
0	H_3	6	3^*	0	0	-1	1	6/3=2 Menor
	Z_j	30	0	5	0	5/2	0	
	C_j - Z_j		3	0	0	-5/2	0	

Valor mayor

Se continúa repitiendo el proceso, hasta que la última fila C_j - Z_j son cero o negativos, para problemas de maximización.

Tabla 3:

	C_j		3	5	0	0	0	b_i/a_{ij}
CVB	Base	b_i	X_1	X_2	H_1	H_2	H_3	
0	H_1	2	0	0	1	1/3	-1/3	
5	X_2	6	0	1	0	1/2	0	
3	X_1	2	1	0	0	-1/3	1/3	
	Z_j	36	3	5	0	3/2	1	
	$C_j - Z_j$		0	0	0	-3/2	-1	

Solución:

Variables de decisión: $X_1 = 2$ y $X_2 = 6$

Variables de holgura: $H_1 = 2$, $H_2 = 0$, $H_3 = 0$

Utilidad: $U = 36$

Otro ejemplo: Determine la solución del siguiente modelo.

Minimizar: $U = 2x_1 + 3x_2$

Restricciones:

$$x_1 + x_2 \geq 350$$
$$x_1 \geq 125$$
$$2x_1 + x_2 \leq 600$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Forma Estándar:

$Z = 2x_1 + 3x_2 + 0E_1 + 0E_2 + 100A_1 + 100A_2 + 0H_3$

$1x_1 + 1x_2 - 1E_1 + 0 + A_1 = 350$

$1x_1 + 0 + 0 - 1E_2 + 0 + A_2 = 125$

$2x_1 + 1x_2 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1H_3 = 600$

Se sigue un proceso similar, la diferencia es que escogemos el valor menor para el intercambio de las variables.

Tabla Inicial: ENTRA

	C_j		2	3	0	0	100	100	0	b_i/a_{ij}
CVB	Base	b_i	X_1	X_2	E_1	E_2	A_1	A_2	H_3	
100	A_1	350	1^O	1	-1	0	1	0	0	350/1=350
100	A_2	125	1^*	0	0	-1	0	1	0	125/1=125Menor
0	H_3	600	2^O	1	0	0	0	0	1	600/2=300
	Z_j	47500	200	100	-100	-100	100	100	0	
	$C_j - Z_j$		-198	-97	100	100	0	0	0	

Valor menor

Tabla 1: ENTRA

	C_j		2	3	0	0	100	100	0	b_i/a_{ij}
CVB	Base	b_i	X_1	X_2	E_1	E_2	A_1	A_2	H_3	
100	A_1	225	0	1	-1	1°	1	-1	0	215/1=215
2	X_1	125	1	0	0	-1°	0	1	0	125/-1
0	H_3	350	0	1	0	2^*	0	-2	1	350/2=175Menor
	Z_j	22750	2	100	-100	98	100	-98	0	
	$C_j - Z_j$		0	-97	100	-98	0	198	0	

Valor menor

Operaciones:

350 – 125x1 = 225
1 – 1x1 = 0
1 – 0x1 = 1
-1 – 0x1 = -1
0 – (-1)x1 = 1
1 – 0x1 = 1
0 – 1x1 = -1
0 – 0x1 = 0

600 – 125x2 = 350
2 – 1x2 = 0
1 – 0x2 = 1
0 – 0x2 = 0
0 – (-1)x2 = 2
0 – 0x2 = 0
0 – 1x2 = -2
1 – 0x2 = 1

Tabla 2: ENTRA

	C_j		2	3	0	0	100	100	0	b_i/a_{ij}
CVB	Base	b_i	X_1	X_2	E_1	E_2	A_1	A_2	H_3	
100	A_1	50	0	1/2*	-1	0	1	0	-1/2	50/1/2=100
2	X_1	300	1	1/2o	0	0	0	0	1/2	300/1/2=600
0	E_2	175	0	1/2o	0	1	0	-1	1/2	175/1/2=350
	Z_j	5600	2	51	-100	0	100	0	-49	
	$C_j - Z_j$		0	-48	100	0	0	100	49	

Valor menor

125 – 175(-1) = 300
1 – 0(-1) = 1
0 – ½(-1) = ½
0 – 0(-1) = 0

225 – 175(1) = 50
0 – 0(1) = 0
1 – ½(1) = 1/2
-1 – 0(1) = -1

-1 – 1(-1) = 0
0 – 0(-1) = 0
1 – (-1)(-1) = 0
0 – ½(-1) = 1/2

1 – 1(1) = 0
1 – 0(1) = 1
-1 – (-1)(1) = 0
1 – ½(1) = -1/2

Tabla 4:

	C_j		2	3	0	0	100	100	0	b_i/a_{ij}
CVB	Base	b_i	X_1	X_2	E_1	E_2	A_1	A_2	H_3	
3	X_2	100	0	1	-2	0	2	0	-1	
2	X_1	250	1	0	1	0	-1	0	1	
0	E_2	125	0	0	1	1	-1	-1	1	
	Z_j	800	2	3	-4	0	4	0	-1	
	$C_j - Z_j$		0	0	4	0	96	100	1	

300 – 100(1/2) = 250
1 – 0(1/2) = 1
1/2 – 1(1/2) = 0
0 – (-2)(1/2) = 1
0 – 0(1/2) = 0
0 – 2(1/2) = -1
0 – 0(1/2) = 0
1/2 – (-1)(1/2) = 1

175 – 100(1/2) = 125
0 – 0(1/2) = 0
1/2 – 1(1/2) = 0
0 – (-2)(1/2) = -1
1 – 0(1/2) = 0
0 – 2(1/2) = 1
-1 – 0(1/2) = 0
1/2 – (-1)(1/2) = -1/2

Solución:

Variables de decisión: $X_1 = 250$ y $X_2 = 100$

Variable de holgura: $H_3 = 0$

Variable excedente: $E_2 = 125$

Costo mínimo: C = 800

Ejemplo: Determine la solución del modelo.

Maximizar $U= 3x_1+5x_2$

Forma Estándar:

Restricciones

$Z= 3x_1+5x_2+0h_1+0h_2+0h_3$

$X_1 \leq 4$

$1x_1+0 \quad +1h_1+0 \quad +0 \quad = 4$

$+2x_2 \leq 12$

$0 \quad +2x_2+0 \quad +1h_2+0 \quad = 12$

$3x_1+2x_2 \leq 18$

$3x_1+2x_2+0 \quad +0 \quad +1h_2 =18$

$x_1, x_2 \geq 0$

Tabla simplex Inicial: Se colocan los valores de la forma estándar

	Ci		3	5	H_1	H_2	H_3	Bi/aij
CVB	Base	bi	X_1	X_2	0	0	0	
0	H_1	4	1	0	1	0	0	
0	H_2	12	0	2	0	1	0	
0	H_3	18	3	2	0	0	1	
	Zi	0	0	0	0	0	0	
	Cj-Zj		3	5	0	0	0	

Se obtiene la suma de los productos con la columna de CVB con cada una de las columnas: bi, X_1, X_2, H_1, H_2, H_3. Luego se resta C_j-Z_j

$0x4 + 0x12 + 0x18 = 0$ $\qquad$ $3 – 0 = 3$

$0x1 + 0x0 + 0x3 = 0$ $\qquad$ $5 – 0 = 5$

$0x0 + 0x2 + 0x2 = 0$ $\qquad$ $0 – 0 = 0$

$0x1 + 0x0 + 0x0 = 0$ $\qquad$ $0 - 0 = 0$

$0x0 + 0x0 + 0x1 = 0$ $\qquad$ $0 - 0 = 0$

De la fila $C_j - Z_j$ se toma el mayor valor, esta columna divide a todos los valores de bi y da lugar a b_i/a_{ij} de la cual se toma la menor.

Entra

		Ci		3	5	H_1	H_2	H_3	Bi/aij	
	CVB	Base	bi	X_1	X_2	0	0	0		
	0	H_1	4	1	0^0	1	0	0	4/0	
Sale	0	H_2	12	0	2^*	0	1	0	12/2 =6	Valor Menor
	0	H_3	18	3	2^0	0	0	1	18/2 =9	
		Zi	0	0	0	0	0	0		
		Cj-Zj		3	5	0	0	0		

Valor mayor

Se vuelve a formar la tabla: ingresar 5 y X_2 en lugar de 0 y H_2, Luego toda la fila se divide para el elemento pívot 2^*. Y nos queda:

Entra

		Ci		3	5	0	0	0	Bi/aij	
	CVB	Base	bi	X_1	X_2	H_1	H_2	H_3		
	0	H_1	4	1	0	1	0	0	4/1=4	
	5	X_2	6	0^0	1	0	½	0	6/0 =	
Sale	0	H_3	6	3^*	0	0	-1	1	6/3 =2	Valor Menor
		Zi	30	0	5	0	5/2	0		
		C_j-Z_j		3	0	0	-5/2	0		

Valor mayor

A continuación, tomamos cada fila y restamos el producto de la fila de pívot por el valor semipívot.

$4 - 6x0^0 = 4$ $\qquad$ $18 - 6x2^0 = 6$

$1 - 0x0^0 = 1$ $\qquad$ $3 - 0x2^0 = 3$

$0 - 1x0^0 = 0$ $\qquad$ $2 - 1x2^0 = 0$

$1 - 0x0^0 = 1$ $\qquad$ $0 - 0x2^0 = 0$

$0 - 1/2x0^0 = 0$ $\qquad$ $0 - 1/2x2^0 = -1$

$0 - 0x0^0 = 0$ $\qquad$ $1 - 0x2^0 = 1$

Se continúa repitiendo el proceso, hasta que la última fila C_j-Z_j son cero o negativos, para problemas de maximización.

	Ci		3	5	H_1	H_2	H_3	Bi/aij
CVB	**Base**	**bi**	**X_1**	**X_2**	**0**	**0**	**0**	
0	H_1	2	0	0	1	1/3	-1/3	2/0 =
5	X_2	6	0	1	0	½	0	6/0 =
3	X_3	2	1	0	0	-1/3	1/3	2/1 = 2
	Z_J	36	3	5	0	3/2	1	
	Cj-Zj		0	0	0	-3/2	-1	

Nota: Cuando los elementos son cero o negativo, se paran las interacciones; entonces tendremos el resultado final.

Solución:

Variables de Decisión: $X_1 = 2$ y $X_2 = 6$

Variables de Holgura: $H_1 = 2$, $H_2 = 0$, $H_3 = 0$

Utilidad: U = 36

Ejemplo: Determine la solución del modelo.

Minimizar $C= 2x_1 + 3x_2$

Restricciones

$x_1 + x_2 \geq 350$

$x_1 \geq 125$

$2x_1 + x_2 \leq 600$

$x_1 , x_2 \geq 0$

Forma Estándar

$Z = 2x_1 + 3x_2 + OE_1 + 0E_2 + 100A_1 + 100A_2 + 0H_3$

$1X_1 + 1X_2 - 1E_1 + 0 + A_1 = 350$

$1X_1 + 0 + 0 - 1E_2 + 0 + A_2 = 125$

$2X_2 + 1X_2 + 0 + 0 + 0 + 1H_3 = 600$

Se sigue un procedimiento similar, la diferencia es que escogemos el valor menor para el intercambio de las variables.

Entra

		Ci		2	3	0	0	100	100	0	Bi/aij	
	CVB	Base	bi	X_1	X_2	E_1	E_2	A_1	A_2	H_3		
	100	A_1	350	1^0	1	1	0	1	0	0	350/1=150	
Sale	100	A_2	125	1*	0	0	-1	0	1	0	125/1=125	Valor Menor
	0	H_3	600	2^0	1	0	0	0	0	1	600/2=300	
		Z_j	47500	200	100	-100	-100	100	100	0		
		Cj-Zj		-198	-97	100	100	0	0	0		

Valor menor

Entra

		Ci		2	3	0	0	100	100	0	Bi/aij	
	CVB	Base	bi	X_1	X_2	E_1	E_2	A_1	A_2	H_3		
	100	A_1	225	0	1	-1	1°	1	-1	0	215/1=215	
	2	A_2	125	1	0	0	-1°	0	1	0	125/-1 =	
Sale	0	H_3	350	0	1	0	2*	0	-2	1	350/2=175	Valor Menor
		Z_j	22750	2	100	-100	98	100	-98	0		
		Cj-Zj		0	-97	100	-98	0	198	0		

Valor menor

350 – 125x1 = 225

600 – 125x2=350

1 – 1x1 = 0

2 – 1x2 = 0

1 – 0x1 = 1

1 – 0x2 = 1

-1 – 0x1 = -1

0 – 0x2 = 0

0 – (-1)x1 = 1

0 – (-1)x2 = 2

1 – 0x1 =1

0 – 0x2 = 0

0 – 1x1 = -1

0 – 1x2 = -2

0 – 0x1 =0

1 – 0x2 = 1

Entra

		Ci		2	3	0	0	100	100	0	Bi/aij	
	CVB	Base	bi	X_1	X_2	E_1	E_2	A_1	A_2	H_3		
Sale	100	A_1	50	0	½ *	-1	0	1	0	-1/2	50/0.5=100	Valor Menor
	2	A_2	300	1	½ °	0	0	0	0	½	300/0.5=600	
	0	H_3	175	0	½ °	0	1*	0	-1	½	175/0.5=350	
		Z_j	5600	2	51	-100	0	100	0	-49		
		Cj-Zj		0	-48	100	0	0	100	49		

Valor menor

125 – 175(-1) = 300

1 – 0(-1) =1

0 – ½(-1) = ½

0 – 0(-1) = 0

-1 – 1(-1) = 0

0 – 0(-1) = 0

1 – (-1)(-1) =0

0 – 1/2(-1) = ½

225 – 175(1) = 50

0 – 0(1) = 0

1 – ½ (1) = ½

-1 – 0(1) = -1

1 – 1(0) = 0

1 – 0(1) = 1

-1 – (-1)(1)=0

0 – ½(1) = -1/2

	Ci		2	3	0	0	100	100	0	Bi/aij
CVB	Base	bi	X_1	X_2	E_1	E_2	A_1	A_2	H_3	
3	X_2	100	0	1	-2	0	2	0	-1	
2	X_1	250	1	0	1	0	-1	0	1	
0	E_2	125	0	0	1	1	-1	-1	1	
	Z_j	800	2	3	-4	0	4	0	-1	
	Cj-Zj		0	0	4	0	96	100	1	

300 – 100 (1/2) = 250

1 – 0 (1/2) = 1

½ - 1(1/2) = 0

0 – (-2) (1/2) = 1

0 – (0) (1/2) = 0

0 – (2) (1/2) = -1

0 – (0) (1/2) =0

½- (-1) (1/2) = 1

175 – 100(1/2) = 125

0 – 0(1/2) = 0

½ - 1(1/2) = 0

0- (-2) (1/2) = 1

1 – 0(1/2) =1

0 – (2) (1/2)=-1

-1- 0(1/2) =-1

½- (-1) (1/2) =1

Solución:

X1 = 250

X2 = 100

Variable Holgura: H3 = 0

Variable excedente: E2 = 125

Costo mínimo: C=$800

Solución analítica mediante Solver de Excel

Herramienta Solver

Solver es una herramienta para resolver y optimizar ecuaciones mediante el uso de métodos numéricos. Con Solver, se puede buscar el valor óptimo para una celda, denominada celda objetivo, en donde se escribe la fórmula de la función objetivo f (x_1, x_2, ..., x_n). Solver cambia los valores de un grupo de celdas, denominadas celdas cambiantes, y que estén relacionadas, directa o indirectamente, con la fórmula de la celda objetivo. En estas celdas se encuentran los valores de las variables controlables x_1, x_2, ..., x_n. Puede agregar restricciones a Solver, escribiendo una fórmula g_j (x_1, x_2, ..., x_n) en una celda, y especificando que la celda deberá ser mayor o igual, igual, o menor o igual que otra celda que contiene la constante c_j. También puede especificar que los valores sean enteros, para evitar dar resultados absurdos de algunos problemas, tales como que se necesitan 3,5 empleados. Solver ajustará los valores de las celdas cambiantes, para generar el resultado especificado en la fórmula de la celda objetivo.

Solver y Programación Lineal

De los ejemplos anteriores podemos ver lo extenso que resulta el proceso simplex en forma manual en el caso de modelos con un número mayor de restricciones y variables, para estos casos haremos uso del complemento de solver, lo que nos permitirá concentrarnos en la construcción del modelo, la interpretación y análisis de sensibilidad de los resultados obtenidos. Para la explicación del manejo de solver, haremos uso del siguiente ejemplo.

Ejemplo: Resuelva el modelo de P.L., haciendo uso de solver.

X_1 = cantidad del producto E y X_2 = cantidad del producto F

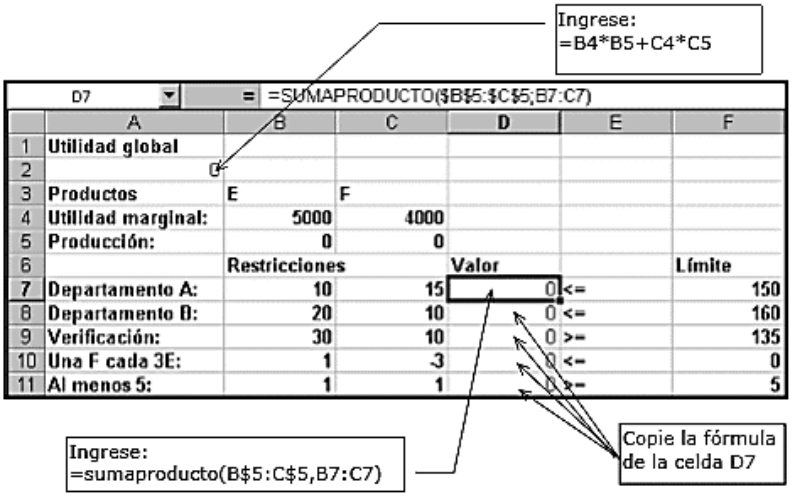
Maximizar la utilidad $U = 5000\ X_1 + 4000\ X_2$

Sujeto a:

$10\ X_1 + 15\ X_2 \leq 150$	Departamento A
$20\ X_1 + 10\ X_2 \leq 160$	Departamento B
$30\ X_1 + 10\ X_2 \geq 135$	Verificación
$X_1 - 3\ X_2 \leq 0$	Una F cada 3E
$X_1 + X_2 \geq 5$	Al menos 5
$X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0$	No negatividad

<u>Introducción de Datos</u>:

Abra una nueva planilla de cálculo. Antes de introducir los datos en la planilla, conviene aumentar el ancho de la columna A para que aparezcan completos los rótulos de esta columna. Las demás columnas pueden quedar sin alterar. Comenzaremos suponiendo que no producimos nada de E ni de F, por lo que escribiremos 0 (cero) en las celdas B5 y C5.



	A	B	C	D	E	F
1	Utilidad global					
2		0				
3	Productos	E	F			
4	Utilidad marginal:	5000	4000			
5	Producción:	0	0			
6		Restricciones		Valor		Límite
7	Departamento A:	10	15	0	<=	150
8	Departamento B:	20	10	0	<=	160
9	Verificación:	30	10	0	>=	135
10	Una F cada 3E:	1	-3	0	<=	0
11	Al menos 5:	1	1	0	>=	5

Una vez introducidos estos datos, podemos probar con distintas cantidades a producir de E y de F, y ver fácilmente si se cumplen las restricciones, y cuál será la utilidad global.

<u>Optimización</u>:

Observe que en la planilla hemos introducido la función objetivo en la celda A2; el lado izquierdo de las restricciones en el rango D7:D11, y el lado derecho de las restricciones en el rango F7:F11.

Seleccione del menú Herramientas / Solver... Aparecerá el cuadro de diálogo Parámetros de Solver, en la que ingresaremos los datos. Cuando el dato sea una celda o un bloque de celdas, puede seleccionarlas haciendo clic en la hoja de cálculo y arrastrando el mouse.

1. Con el cuadro de diálogo abierto, haga clic en la celda A2 de la planilla. En la caja debajo de Celda objetivo se borra el contenido anterior y se muestra $A$2.

2. Haga clic en la opción Máximo.

3. Haga clic en la caja debajo de Cambiando las celdas. Haga clic en la celda B5, y arrastre el mouse sin soltarlo para seleccionar también la celda C5.

4. Haga clic en el botón Agregar..., debajo de Sujetas a las siguientes restricciones.

Aparece el cuadro de diálogo Agregar restricción.

Use la caja debajo de Referencia de la celda: para poner el lado izquierdo de la restricción.

Use la lista desplegable del centro para elegir un símbolo.

Use la caja debajo de Restricción para agregar el lado derecho de la restricción.

Haga clic en el botón Agregar para agregar más restricciones, o en el botón Aceptar para finalizar.

El cuadro de diálogo Parámetros de Solver debe quedar:

Haga clic en el botón Opciones, con lo que aparecerá el cuadro de diálogo Opciones de Solver.

Como nuestro modelo es lineal, seleccione la casilla de verificación Adoptar modelo lineal, y luego haga clic en el botón Aceptar.

<u>Resolución</u>:

Una vez introducidos estos datos, seleccione Resolver, y Solver, si todo anduvo bien, mostrará un mensaje con:

Seleccione:

Utilizar solución de Solver y elija los 3 informes. Para esto, seleccione el primero y mantenga apretada la tecla del mouse, hasta seleccionar los 3, o ubíquese en el primero y mantenga apretada la tecla Alt. Después de unos segundos, Solver habrá agregado 3 hojas de cálculo en su libro, una por cada informe. Estos son: El Informe de Respuestas, el Informe de Sensibilidad y el Informe de Límites.

Los Datos de la Planilla:

Si no ha cometido errores, Solver ha encontrado los valores óptimos de las variables controlables, y, por tanto, en las celdas B5 y C5 se muestra la solución óptima: $X_1 = 4.5$ y $X_2 = 7$. La utilidad máxima será 50.500.

Informes de Respuestas, sensibilidad y límites de Solver

Además de los resultados óptimos de un modelo de programación lineal, solver nos proporciona tres informes:

Informe de Respuestas

Los informes de Solver son tan claros que apenas merecen aclaración. La razón principal de su claridad se debe a que bajo cada columna Nombre, pone la intersección de fila y columna de rótulos. Así, por ejemplo, observe que en Celdas Cambiantes, debajo de Nombre, el informe puso: Producción: E; "Producción" es el rótulo de la fila y "E" el de la columna de la planilla.

Celda objetivo (Máx)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$A$2	Utilidad global	0	50500

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$B$5	Producción: E	0	4.5
$C$5	Producción: F	0	7

Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	Fórmula	Estado	Divergencia
$D$7	Departamento A: Valor	150	$D$7<=$F$7	Obligatorio	0
$D$8	Departamento B: Valor	160	$D$8<=$F$8	Obligatorio	0
$D$9	Verificación: Valor	205	$D$9>=$F$9	Opcional	70
$D$10	Una F cada 3E: Valor	-16.5	$D$10<=$F$10	Opcional	16.5
$D$11	Al menos 5: Valor	11.5	$D$11>=$F$11	Opcional	6.5
$B$5	Producción: E	4.5	$B$5>=0	Opcional	4.5
$C$5	Producción: F	7	$C$5>=0	Opcional	7

En Celda Objetivo aparece la celda de la función objetivo, el Nombre, el valor inicial antes de optimizar y el valor óptimo (valor final).

En Celdas Cambiantes aparecen las celdas de las variables controlables, el nombre, la solución inicial o valores iniciales de las variables y la solución óptima (valor final).

En Restricciones se tiene:

Valor de la celda: es el valor que toma el lado izquierdo de cada restricción en la solución óptima.

Fórmula: nos recuerda las restricciones que hemos introducido, incluyendo si es de ≤, = o ≥.

Estado: Nos indica si la restricción se cumple exactamente, con una igualdad, y no hay un margen. En otras palabras, nos indica si la restricción es activa.

Divergencia: es el margen que tiene cada restricción. Si la desigualdad es ≤, entonces es el lado derecho de la restricción (la constante) menos el lado izquierdo. Si la desigualdad es ≥, es el lado izquierdo menos el lado derecho (la constante). Si la restricción es activa, desde luego el margen será cero.

Informe de Sensibilidad

En el informe de sensibilidad se analiza la sensibilidad de la solución óptima a los cambios tanto en los recursos como en los precios.

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor final	Costo reducido	Coeficiente objetivo	Aumento permisible	Disminución permisible
$B$5	Producción: E	4.5	0	5000	3000	2333.333333
$C$5	Producción: F	7	0	4000	3500	1500

Restricciones

Celda	Nombre	Valor final	Sombra precio	Restricción lado derecho	Aumento permisible	Disminución permisible
$D$7	Departamento A: Valor	150	150	150	90	47.14285714
$D$8	Departamento B: Valor	160	175	160	73.33333333	40
$D$9	Verificación: Valor	205	0	135	70	1E+30
$D$10	Una F cada 3E: Valor	-16.5	0	0	1E+30	16.5
$D$11	Al menos 5: Valor	11.5	0	5	6.5	1E+30

Celdas Cambiantes

Valor: nos recuerda los valores óptimos de las variables controlables.

Costo reducido: indica cuánto deberá cambiar el coeficiente de la función objetivo para que la variable tome un valor positivo. En este

caso, las dos variables controlables son positivas (conviene producir ambos productos), por lo que su costo reducido es cero.

Coeficiente objetivo: son los coeficientes de la función objetivo. Aumento permisible: incremento admisible en los coeficientes de la función objetivo sin que cambien los valores óptimos de las variables controlables.

Disminución permisible: disminución admisible en los coeficientes de la función objetivo sin que cambien los valores óptimos de las variables controlables.

Restricciones

Valor final: es el valor que toma el lado izquierdo de cada restricción en la solución óptima.

Sombra precio: son los precios duales, o precios sombra de los recursos (o requerimientos) indicados en las restricciones. Indican la mejora en el valor de la función objetivo si se "relaja" una desigualdad, o el empeoramiento si se la restringe. Por ejemplo, si dispusiéramos de más tiempo en el Departamento B, podríamos mejorar la utilidad global incrementándose en $175 por cada hora extra.

Restricción lado derecho: indican los lados derechos de las desigualdades.

Aumento permisible: representa en cuánto puede incrementarse el lado derecho (Constante) sin que se altere el precio Dual. Por ejemplo, se puede incrementar el número de horas extras del Departamento B, mejorando en $175 por cada hora extra. Sin embargo, este análisis es válido sólo para un incremento de hasta 73.3333 horas. Si disponemos de más de 160+73.3333 horas, el precio dual será otro, seguramente menor.

Disminución admisible: indica en cuánto puede disminuir el lado derecho de la restricción sin que cambie el precio dual de un recurso (o requerimiento).

Informe de Límites

Este informe muestra la modificación que se puede dar en algunos coeficientes o variables para que la solución no varíe,

Celda objetivo		
Celda	Nombre	Valor
$A$2	Utilidad global	50500

Celdas cambiantes						
Celda	Nombre	Valor	Límite inferior	Resultado objetivo	Límite superior	Resultado objetivo
$B$5	Producción: E	4.5	2.166666667	38833.33333	4.5	50500
$C$5	Producción: F	7	1.5	28500	7	50500

Celdas Cambiantes

Valor: nos recuerda los valores óptimos de las variables controlables.

Límite inferior: es el menor valor que puede tomar la variable (suponiendo que las demás mantienen el valor óptimo encontrado), y satisfacer todas las restricciones.

Resultado objetivo: valor de la función objetivo si la variable toma el valor del límite inferior y las demás mantienen el valor óptimo encontrado.

Límite superior: es el mayor valor que puede tomar la variable (suponiendo que las demás mantienen el valor óptimo encontrado) sin violar las restricciones.

Resultado objetivo: valor de la función objetivo si la variable toma el valor del límite superior y las demás mantienen el valor óptimo encontrado.

El informe de respuestas de Excel no sólo brinda la solución óptima de un Programa Lineal, sino también los Precios Duales correspondientes a cada restricción y el Análisis de Sensibilidad de los coeficientes de la función objetivo y de las constantes del lado derecho de cada restricción. Esta información ha demostrado ser muy útil en el análisis de diversos problemas.

Problemas de aplicación, mediante el programa Solver

Se detalla el proceso, paso a paso, para lo cual haremos uso del siguiente ejemplo.

$$\text{Max } U = 200X + 150Y + 120Z$$

$$15X + 7.5Y + 5Z \leq 315$$

$$2X + 3Y + 2Z \leq 110$$

$$1X + 1Y + 1Z \leq 50$$

$$X, Y, Z \geq 0$$

Pasos a seguir:

Nos dirigimos a Datos y dentro del grupo Análisis de la ficha Datos, haga clic en Solver.

Escribimos donde irán las Variables de Decisión, y colocaremos nuestras variables, en este caso serán X, Y y Z, en la fila número 5 colocaremos los valores que le corresponden a cada uno. Luego ubicamos el lugar donde estará nuestra Función Objetivo.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		VARIABLES DE DECISION					
3		X	Y	Z		F. OBJETIVO	
4							
5		200	150	120			
6							

Procedente a eso, nos ubicamos en la celda de la función objetivo y colocamos la fórmula =SUMAPRODUCTO (B4:D4, B5:D5), esto nos dará como resultado 0.

F4 =SUMAPRODUCTO(B4:D4,B5:D5)

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		VARIABLES DE DECISION					
3		X	Y	Z		F. OBJETIVO	
4						0	
5		200	150	120			
6							
7							

Nota: En el Microsoft Word es recomendable colocar la coma (**,**) para diferenciar las matrices, sin embargo, para otras versiones de Microsoft Word se coloca el punto y coma (**;**). Luego procedemos a colocar las **restricciones** de cada una de las variables (X. Y, Z).

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		VARIABLES DE DECISION					
3		X	Y	Z		F. OBJETIVO	
4						0	
5		200	150	120			
6							
7		RESTRNCCIONES					
8		X	Y	Z	LADO IZQ.	LADO DER.	
9		15	7.5	5		315	
10		2	3	2		110	
11		1	1	1		50	
12							

$$15X + 7.5Y + 5Z \leq 315$$
$$2X + 3Y + 2Z \leq 110$$
$$1X + 1Y + 1Z \leq 50$$
$$X + Y + Z \geq 0$$

Después colocamos la fórmula en las celdas del Lado Izquierdo: =SUMAPRODUCTO ($B$4:$D$4, B9:D9), luego copiamos la fórmula en las demás celdas, desde E9 hasta E: 11.

E9 =SUMAPRODUCTO($B$4:$D$4,B9:D9)

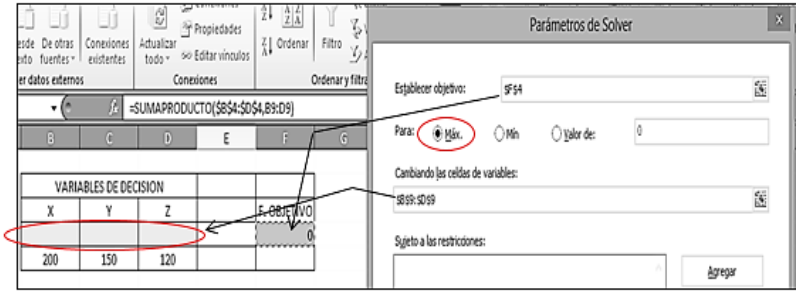
	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		VARIABLES DE DECISION					
3		X	Y	Z		F. OBJETIVO	
4						0	
5		200	150	120			
6							
7		RESTRNCCIONES					
8		X	Y	Z	LADO IZQ.	LADO DER.	
9		15	7.5	5	0	315	
10		2	3	2	0	110	
11		1	1	1	0	50	
12							

Una vez Obtenido el resultado de todas las restricciones, procedemos a ir a la opción SOLVER.

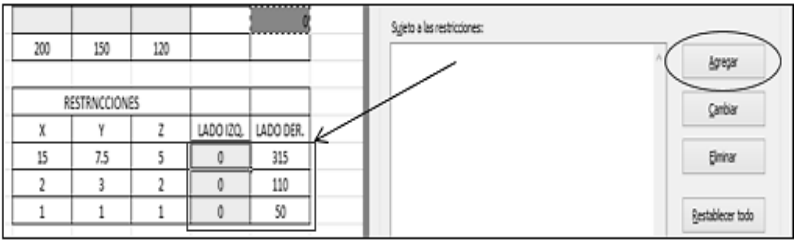
En Establecer Objetivo colocamos la celda de f. objetivo.

Luego marcamos en la opción Max. (Eso dependerá si se quiere maximizar o minimizar el resultado).

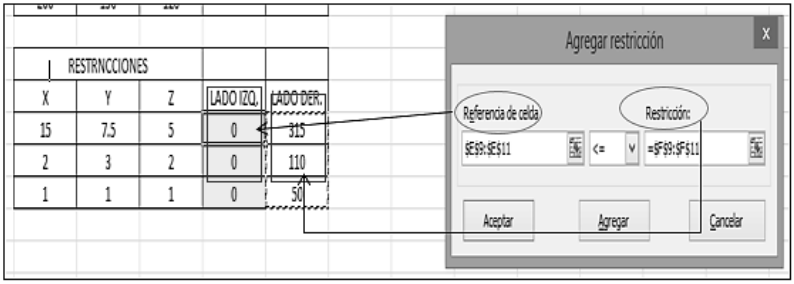
En Cambiando las celdas de variables ubicamos las celdas de las variables donde irán los resultados.



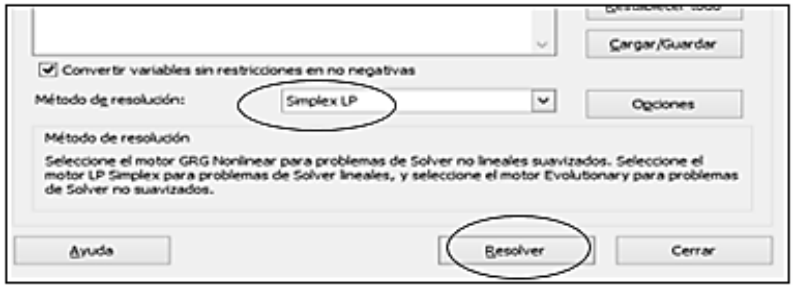
En Sujeto a las Restricciones, se colocan las restricciones de las variables, para eso, damos clic en AGREGAR.



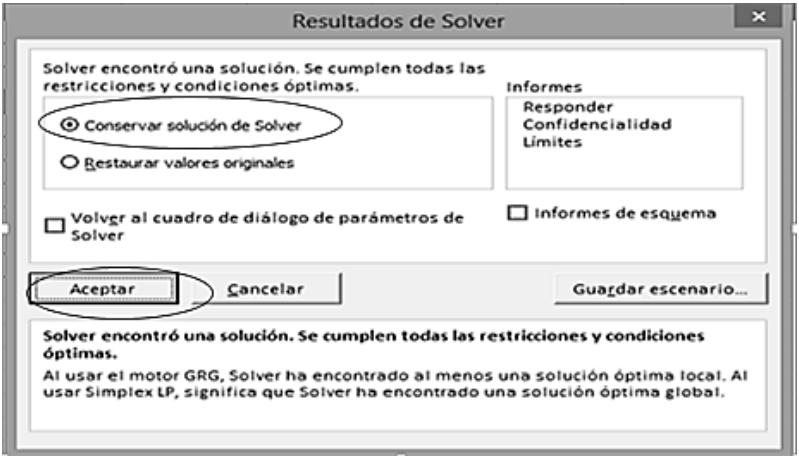
Después de eso, comenzamos a colocar las celdas correspondientes según los datos que se nos pongan Una vez colocados los valores, damos clic en ACEPTAR.



Verificamos que este en modo Simplex LP y luego damos clic en Resolver.



Marcamos las opciones que se muestran a continuación, y damos clic en ACEPTAR.



Por último observamos los resultados finales.

Valores que se permiten para cada variable, respetando las restricciones

VARIABLES DE DECISION				
X	Y	Z		F. OBJETIVO
4	10	36		6620
200	150	120		

RESTRNCCIONES				
X	Y	Z	LADO IZQ.	LADO DER.
15	7.5	5	315	315
2	3	2	110	110
1	1	1	50	50

El valor final de todas las variables combinadas según cada restricción que poseen

Solución:

$U_{max} = 6620$

X = 4, Y = 10, Z = 36

Ejemplo: Maximización de utilidades.

Una empresa fabrica cuatro productos A, B, C y D. cada unidad del producto A requiere 2 horas de preparación, una hora de montaje y

$10 de proceso de inventario. Cada unidad de producto B necesita una hora de preparación, 3 horas de montaje, $5 por proceso de inventario. Una unidad del producto C requiere 2.5 horas de preparación, 2.5 horas de montaje y $2 por inventario. Por último, cada unidad de producto D requiere 5 horas de preparación, no necesita montaje, y cuesta $12 el proceso de inventario. La empresa tiene disponibles 120 horas de para la preparación y 160 para el montaje. Además, dispone de no más de $1000 para el proceso de inventario.

Cada unidad del producto A, B, C y D generan un beneficio de $40, $24; $36; $23 respectivamente. No se pueden vender más de 20 unidades del producto A, ni más de 16 unidades en el producto C, puede venderse cualquier número de unidades de los productos B y D. sin embargo, hay que producir por lo menos 10 unidades del producto D para satisfacer un requisito contractual. La empresa desea conocer la producción que maximice las utilidades.

Siguiendo los lineamientos planteados llegaremos a formular el modelo:

El gerente pide maximizar las utilidades. Por lo tanto la función objetivo sea de maximización.

El gerente pide la producción que maximice las utilidades. La decisión a tomar será cuantas unidades de los productos A, de B, de C y de D se deben fabricar para maximizar las utilidades.

Hay tres tipos de restricciones:

Disponibilidad de tiempo en los departamentos de preparación y montaje.

La empresa dispone de 120 horas para la preparación, es decir, que se podrá utilizar las 120 horas o menos. Asimismo, la empresa

dispone de 160 horas para la operación de montaje, es decir, que no se podrá utilizar más de 160 horas.

Dinero para el inventario. Dispone de no más de $1000 para inventario, es decir, podrá utilizar los $1000 o menos.

Exigencias del mercado para los dos productos A, B y D. no se pueden vender más de 20 unidades de A, es decir, la producción deberá de ser de 20 unidades o menos. No se puede vender más de 16 unidades de C, igual mente la producción deberá ser de 16 o menos. No hay límites masivos para los productos B y D, es decir no hay restricciones. Hay un límite mínimo para la producción de D, es decir deberán producirse al menos 10 unidades.

Para definir las variables de decisión, preguntémonos ¿que pide la empresa? La empresa pide la cantidad de cada producto que se debe producir para maximizar las unidades. Entonces identifiquemos como X_1 el número de unidades que se deben producir del producto A; X_2, número de unidades que deben producir del producto B; X_3 número de unidades que deben producirse del producto C; X4, número de unidades que deben producirse del producto D.

Las restricciones detalladas en el paso 3 las expresamos en forma de expresiones matemáticas, por ejemplo:

Las 120 y 160 horas disponibles en las operaciones de preparación y montaje deben distribuirse en los cuatro productos. El producto A requiere de 2 horas, el producto B de 1 hora, el producto C de 2.5 horas, y el producto de D requiere de 5 horas, en la operación de preparación. Estas descripciones teóricas pueden ser expresadas matemáticamente de la siguiente forma:

$1X_1 + 3X_2 + 2.5X_3 < 160$ horas (Restricción de la operación de montaje).

El dinero disponible para el inventario debe ser distribuido en los cuatro productos. De la lectura del problema se puede establecer la siguiente restricción.

$10X_1 + 5X_2 + 2X_3 + 12X_4 < 1000\$$ (Restricción de dinero para inventario).

Las exigencias del mercado que se pueden expresar matemáticamente de la siguiente forma:

$X_1 < 20$
$X_3 < 16$
$X_4 > 10$

Definir la función objetivo. Identificar, cual es la utilidad que genera cada unidad de producto A, B, C y D. la descripción del problema de cada unidad de estos productos genera una utilidad de $40, $24, $36, $23, respectivamente. La utilidad total que se obtenga por la producción será la suma de las utilidades de cada producto multiplicada por el número de unidades que se fabriquen. Esto se expresa de la siguiente forma:

Maximizar utilidades $U = 4.X_1 + 24X_2 + 36X_3 + 23X_4$ (Función Objetivo).

Las restricciones del modelo matemático para el problema son:

$2X_1 + 1X_2 + 2.5X_3 + 5X_4 < 120$ horas
$1X_1 + 3X_2 + 2.5X_3 < 160$ horas
$10X_1 + 5X_2 + 2X_3 + 12X_4 < 1000$ dólares
$X_1 < 20$ producción de A
$X_3 < 16$ producción de C
$X_4 > 10$ producción de D
$X_1, X_2, X_3, X_4 > 0$ no negatividad de las variables.

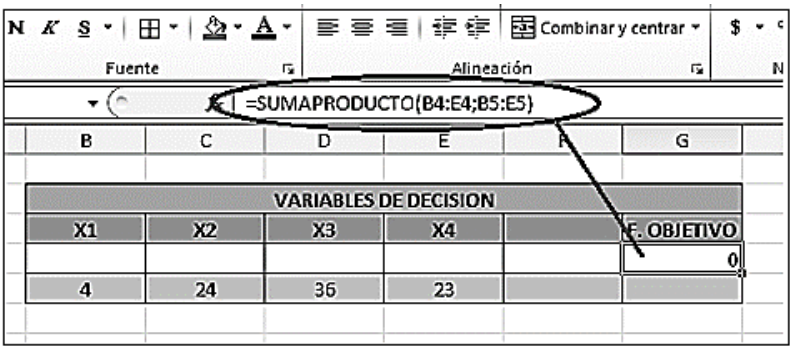
Aplicación del Solver.

Escribimos donde irán las Variables de Decisión, y colocaremos nuestras variables, en este caso serán X1, X2, X3, X4 en la fila número 6 colocaremos los valores que le corresponden a cada uno. Luego ubicamos el lugar donde estará nuestra Función Objetivo.

VARIABLES DE DECISION				
X1	X2	X3	X4	F. OBJETIVO
4	24	36	23	

Procedente a eso, nos ubicamos en la celda de la función objetivo y colocamos la fórmula

=SUMAPRODUCTO (B4:D4, B5:D5), esto nos dará como resultado 0.

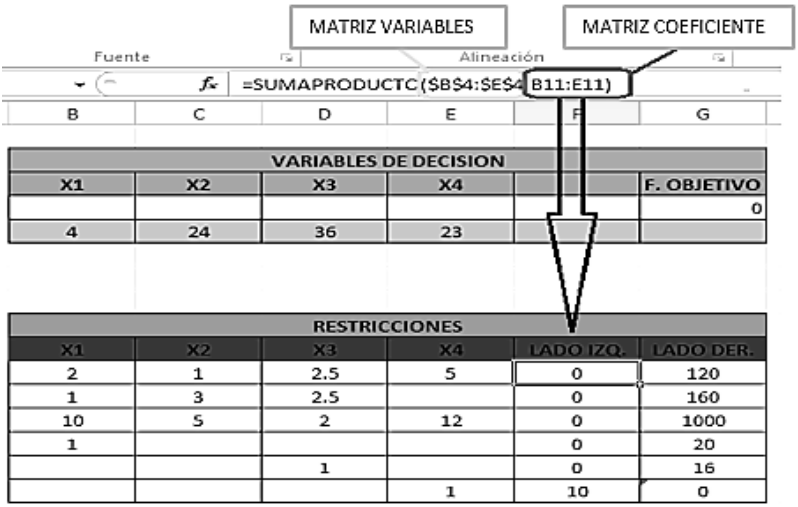


Luego procedemos a colocar las Restricciones de cada una de las variables: X1, X2, X3, y X4.

VARIABLES DE DECISION					
X1	X2	X3	X4		F. OBJETIVO
					0
4	24	36	23		

RESTRICCIONES					
X1	X2	X3	X4	LADO IZQ.	LADO DER.
2	1	2.5	5		120
1	3	2.5			160
10	5	2	12		1000
1					20
		1			16
			1	10	

Después colocamos la fórmula en las celdas del Lado Izquierdo: =SUMAPRODUCTO ($B$4:$D$4, B9:D9), luego copiamos la fórmula en las demás celdas, desde E9 hasta E: 11.

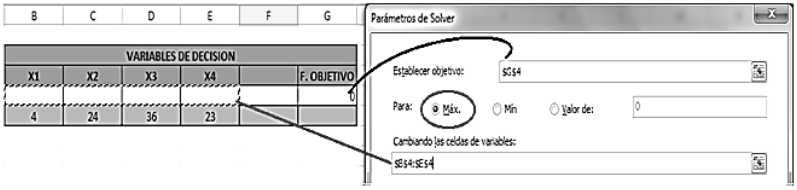


Una vez Obtenido el resultado de todas las restricciones, procedemos a ir a la opción SOLVER.

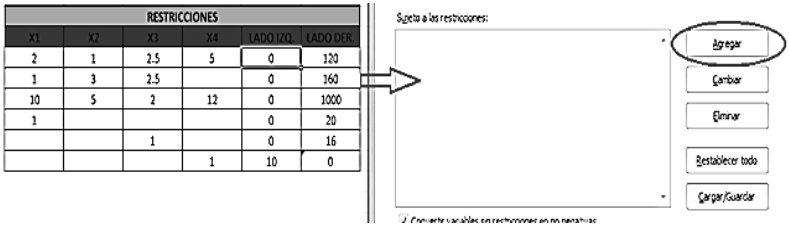
En Establecer Objetivo colocamos la celda de f. objetivo

Luego marcamos en la opción Max. (Eso dependerá si se quiere maximizar o minimizar el resultado).

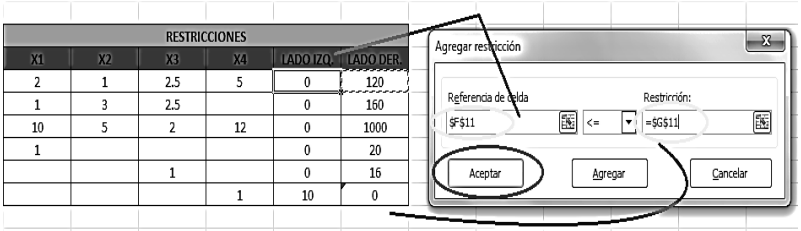
En Cambiando las celdas de variables ubicamos las celdas de las variables donde irán los resultados.



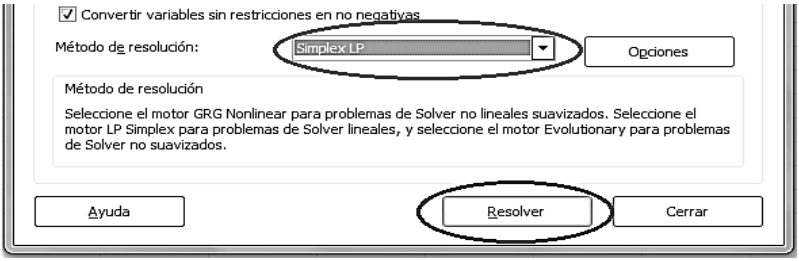
En Sujeto A Las Restricciones, se colocan las restricciones de las variables, para eso, damos clic en AGREGAR**.**



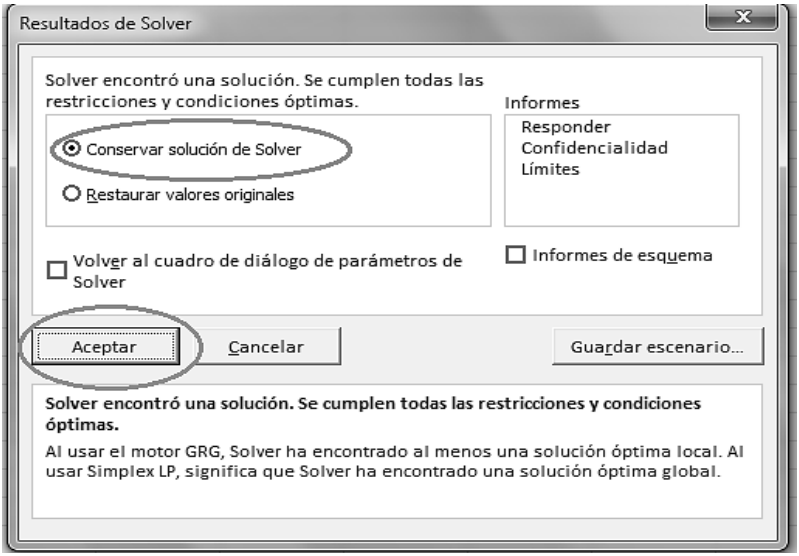
Después de eso, comenzamos a colocar las celdas correspondientes según los datos que se nos pongan Una vez colocados los valores, damos clic en ACEPTAR.



Verificamos que este en modo Simplex LP y luego damos clic en Resolver.



Marcamos las opciones que se muestran a continuación, y damos clic en ACEPTAR.



Por último, observamos los resultados finales.

Valores que se permiten para cada variable, respetando las restricciones

VARIABLES DE DECISION					
X1	X2	X3	X4		F. OBJETIVO
0	53,33	16	10		2086
4	24	36	23		

El valor final de todas las variables combinadas según cada restricción que poseen

RESTRICCIONES					
X1	X2	X3	X4	LADO IZQ.	LADO DER.
2	1	2.5	5	103,33	120
1	3	2.5		160	160
10	5	2	12	418,67	1000
1				0	20
		1		16	16
			1	10	10

Problemas de Análisis de sensibilidad con Solver

Los parámetros (constantes) utilizados en un modelo de programación lineal con frecuencia son las mejores estimaciones de sus valores reales. Por ejemplo, la contribución a la utilidad supuesta para un producto se puede basar en las mejores estimaciones del precio de venta y el costo variable por unidad. El costo variable por unidad debe suponer ciertas tasas salariales, tiempos de procesamiento esperados y costos de material. Como otro ejemplo, las estimaciones de disponibilidad de trabajo en diferentes departamentos tal vez no reflejen las incertidumbres asociadas al ausentismo y a los cambios de personal. El punto es que a menudo no es posible determinar con certeza los parámetros utilizados para derivar una solución óptima.

Por tanto, una vez que se deriva una solución al usar estos valores "supuestos", se debe examinar para determinar los efectos si los parámetros tienen valores diferentes de los que se utilizaron en la formulación original. Este análisis posterior a la solución se llama análisis de la sensibilidad. Si el análisis revela que los cambios significativos en los valores de los parámetros sólo afectan ligeramente la base, el valor de la función objetivo óptimo, o ambos, se dice que la solución es insensible. Sin embargo, si la base, la función objetivo, o ambas varían de manera considerable con

cambios menores en los parámetros, la solución se juzga como sensible y tal vez merezca escrutinio adicional. Muchos paquetes de programación lineal cuentan con el análisis de la sensibilidad. Este paquete particular realiza el análisis de la sensibilidad para los coeficientes de la función objetivo de todas las variables de decisión y las constantes del lado derecho para las restricciones estructurales. Enfoquémonos primero en el análisis de los coeficientes de la función objetivo.

En el caso de los coeficientes de la función objetivo, el análisis de la sensibilidad determina cuánto puede cambiar cada coeficiente sin que cambie su base actual; es decir, el mismo conjunto de variables básicas sigue siendo óptimo y sus valores no han cambiado. Otra manera de considerar esto es que nos interesamos en cuánto pueden cambiar estos coeficientes para que el punto vértice en la región de soluciones factibles siga siendo óptimo.

Otro tipo importante de análisis posterior a lo óptimo es el examen de precios sombra. Un precio sombra es la cantidad que el valor óptimo de la función objetivo cambiaría si el lado derecho de una restricción aumentara en una unidad. El precio sombra es válido para un rango particular de cambios en la constante del lado derecho. El rango válido para cada precio sombra se puede determinar mediante otro tipo de análisis posterior a lo óptimo.

En la resolución de un modelo de programación haciendo uso de solver, este nos genera como se indicó anteriormente tres informes, cuya interpretación nos proporciona los elementos del análisis de sensibilidad.

Ejemplo: Diseño de raciones para vacas lecheras.

Para aplicar la programación lineal en la elaboración de las raciones para vacas lecheras, partimos de una ración hipotética en la cual intervienen

los siguientes datos:
- Dos alimentos : un Concentrado (X_1) y un Forraje (X_2)
- Tres nutrientes :

Proteína Cruda PC
Energía Neta de lactancia ENI
Fibra Cruda FC

- El precio por Kilogramo de cada uno de los alimentos
- Necesidades nutritivas de las vacas lecheras.

ALIMENTOS	VARIABLES	PC	ENI	FC	PRECIO
		(gr)	(Mcal)	(gr)	($)
concentrado	X_1	120	2.0	100	100
forraje	X_2	200	1.3	280	50

Necesidades nutricionales:

	PC (gr)	ENI (Mcal)	FC (gr)
MAXIMO			2000
MINIMO	1500	16.5	1300

Nuestro propósito es el de optimizar una ración de Mínimo Costo, aplicando la programación lineal por el método gráfico. El modelo de programación lineal es el siguiente:

Variables:

X_1 = número de kilogramos de concentrado

X_2 = número de kilogramos de forraje

Función Objetivo:

Mínimo Costo = $110\ X_1 + 50\ X_2$

Restricciones:

Sujeto a las siguientes restricciones:

$120\ X_1 + 200\ X_2 \geq 1500$	(Proteína cruda PC)
$2.0\ X_1 + 1.3\ X_2 \geq 16.5$	(Energía neta de lactancia ENI)
$100\ X_1 + 280\ X_2 \leq 2000$	(Fibra cruda FCmax)
$100\ X_1 + 280\ X_2 \geq 1300$	(Fibra cruda FCmin)

La ecuación (1) corresponde a la FUNCION OBJETIVO, que se trata de Minimizar, la restricción (2) es de la Proteína Cruda PC, que como mínimo debe tener 1500 gramos, la restricción (3) es de la Energía Neta de lactancia ENI, que como mínimo debe tener 16.5 Mcal., la restricción (4) es de la Fibra Cruda, FCmax que como máximo debe tener 2000 gramos, la restricción (5) es también de la Fibra Cruda FCmin, pero en este caso debe tener un mínimo de 1300 gramos.

Se va a determinar haciendo uso del complemento Solver de Excel, cuantos Kilogramos de Concentrado (X_1) y cuantos Kilogramos de Forraje (X_2) se calcularán para que la ración sea al mínimo costo posible y cubra los requerimientos nutritivos.

Solución: Aplicando solver obtenemos la siguiente solución.

VARIABLES			
X1	X2		F. OBJETIVO
4,70	5,47		790
110	50		

RESTRICCIONES			
X1	X2	LADO IZQ	LADO DER
120	200	1656,744186	1500
2	1,3	16,5	16,5
100	280	2000	2000
100	280	2000	1300

Informe de respuestas:

Celda objetivo (Min)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$E$4	F. OBJETIVO	0	790

Celdas de variables

Celda	Nombre	Valor original	Valor final	Entero
$B$4	X1	0	4,697674419	Continuar
$C$4	X2	0	5,465116279	Continuar

Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	Fórmula	Estado	Demora
$D$10	LADO IZQ	16,5	$D$10>=$E$10	Vinculante	0
$D$11	LADO IZQ	2000	$D$11<=$E$11	Vinculante	0
$D$12	LADO IZQ	2000	$D$12>=$E$12	No vinculante	700
$D$9	LADO IZQ	1656,744186	$D$9>=$E$9	No vinculante	156,744186

Informe de sensibilidad:

Celdas de variables

Celda	Nombre	Final Valor	Reducido Coste	Objetivo Coeficiente	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
$B$4	X1	4,697674419	0	110	1E+30	33,07692308
$C$4	X2	5,465116279	0	50	21,5	1E+30

Restricciones

Celda	Nombre	Final Valor	Sombra Precio	Restricción Lado derecho	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
$D$10	LADO IZQ	16,5	60	16,5	23,5	4,955882353
$D$11	LADO IZQ	2000	-0,1	2000	1553,846154	276,2295082
$D$12	LADO IZQ	2000	0	1300	700	1E+30
$D$9	LADO IZQ	1656,744186	0	1500	156,744186	1E+30

Informe de límites:

Objetivo		
Celda	Nombre	Valor
$E$4	F. OBJETI	790

Variable			Inferior	Objetivo	Superior	Objetivo
Celda	Nombre	Valor	Límite	Resultado	Límite	Resultado
$B$4	X1	4,698	4,69767	790	4,69767	790
$C$4	X2	5,465	5,46512	790	5,46512	790

La interpretación de estos informes nos proporciona:

Holguras y excedentes de las restricciones.

Intervalo de optimalidad de los coeficientes de la función objetivo.

Intervalo de factibilidad de las restricciones.

Precios sombras de los recursos.

Entre otros análisis de sensibilidad posibles, como podemos observar en los siguientes ejemplos.

Ejemplo: Maximización de productos lácteos.

Nutrileche, tiene una capacidad de recepción de 50000 litros de leche diarios. La administración exige que al menos 30000 litros sean embotellados diariamente y el resto sea empleado para producir leche especial o mantequilla. La contribución de cada litro de leche a la utilidad, según el uso que se le dé, es la siguiente: embotellada $100, especial $150 y $160 la unidad de mantequilla.

El equipo de fabricación de mantequilla puede manejar hasta 6000 litros diarios de leche, el equipo de envase puede manejar hasta 40000 litros diarios, y el de leche especial hasta 20000 litros por día. La empresa desea conocer que cantidad de leche en litros es convertida en mantequilla o en leche especial y cuanto se debe embotellar (leche corriente) para maximizar la ganancia.

Primero, determinamos el modelo:

Formulación del modelo:

Variables:

X_1 = número litros de leche corriente que se embotellara diariamente.

X_2 = número litros de leche que se destinara diariamente a la producción de mantequilla.

X_3 = número litros de leche que se destinara diariamente a la producción de leche especial.

Función objetivo:

Maximizar: $U = 100\ X_1 + 160\ X_2 + 150\ X_3$

Restricciones:

$X_1 + X_2 + X_3 \leq 50.000$ Capacidad de recepción diaria

$X_1 \geq 30.000$ Exigencia de leche por embotellar

$X_2 \leq 6.000$ Capacidad de fabricación de mantequilla

$X_1 \leq 40.000$ Capacidad de equipo de envase

$X_3 \leq 20.000$ Capacidad de equipo de leche especial

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

Luego, hacemos uso de solver para obtener las soluciones:

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		VARIABLES					
3		X1	X2	X3		F. OBJETIVO	
4		30000	6000	14000		6060000	
5		100	160	150			
6							
7		RESTRICCIONES					
8		X1	X2	X3	LADO IZQ	LADO DER	
9		1	1	1	50000	50000	
10		1	0	0	30000	30000	
11		0	1	0	6000	6000	
12		1	0	0	30000	40000	
13		0	0	1	14000	20000	
14							

Informe de respuestas:

Microsoft Excel 15.0 Informe de respuestas

Celda objetivo (Máx)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$F$4	F. OBJETIVO	0	6060000

Celdas de variables

Celda	Nombre	Valor original	Valor final	Entero
$B$4	X1	0	30000	Continuar
$C$4	X2	0	6000	Continuar
$D$4	X3	0	14000	Continuar

Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	Fórmula	Estado	Demora
$E$10	LADO IZQ	30000	$E$10>=$F$10	Vinculante	0
$E$11	LADO IZQ	6000	$E$11<=$F$11	Vinculante	0
$E$12	LADO IZQ	30000	$E$12<=$F$12	No vinculante	10000
$E$13	LADO IZQ	14000	$E$13<=$F$13	No vinculante	6000
$E$9	LADO IZQ	50000	$E$9<=$F$9	Vinculante	0

Informe de sensibilidad:

Microsoft Excel 15.0 Informe de confidencialidad

Celdas de variables

Celda	Nombre	Final Valor	Reducido Coste	Objetivo Coeficiente	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
$B$4	X1	30000	0	100	50	1E+30
$C$4	X2	6000	0	160	1E+30	10
$D$4	X3	14000	0	150	10	50

Restricciones

Celda	Nombre	Final Valor	Sombra Precio	Restricción Lado derecho	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
$E$10	LADO IZQ	30000	-50	30000	10000	6000
$E$11	LADO IZQ	6000	10	6000	14000	6000
$E$12	LADO IZQ	30000	0	40000	1E+30	10000
$E$13	LADO IZQ	14000	0	20000	1E+30	6000
$E$9	LADO IZQ	50000	150	50000	6000	14000

Informe de límites:

Microsoft Excel 15.0 Informe de límites

	Objetivo	
Celda	Nombre	Valor
$F$4	F. OBJETI	6E+06

	Variable		Inferior	Objetivo	Superior	Objetivo
Celda	Nombre	Valor	Límite	Resultado	Límite	Resultado
$B$4	X1	30000	30000	6060000	30000	6060000
$C$4	X2	6000	0	5100000	6000	6060000
$D$4	X3	14000	0	3960000	14000	6060000

Ejemplo: Maximización de la producción de fertilizantes

Fertiagro, fabrica dos fertilizantes dos fertilizantes a partir de las mezclas codificadas como 5-5-10 y 5-10-5. El primer numero corresponde al porcentaje que el producto final tiene un componente quimico A, el segundo numero corresponde al porcentaje del componente B, que aparece en el producto final, y el tercer valor es el porcentaje del componente C en el producto final. El fertilizante se estabiliza con un material de relleno que puede ser barro. Ejemplo: 5-5-10 esta elaborado con 5% del componente A, 5% del componente B, 10% del componente C y 80% de barro.

Fertiagro, puede vender todo lo que fabrica a $715/tonelada de fertilizante X y a $690/tonelada de fertilizante Y (los precios estanmultiplicados por un factor de actualizacion).

Para el periodo hay 1100 toneladas del componente A disponible a $2000/tonelada; 1800 toneladas del componente B a $800/toneladas y 2000 toneladas del componente C a $1600/toneladas. El barro esta disponible en cantidad ilimitada y se consigue a $100 por tonelada. Como es un ejemplo sencillo no tenga en cuenta restricciones por mano de obra, ni tampoco para la maquinaria durante el periodo. Debe tener presente un costo de $150/toneladas por la operación de mezclado de los componentes.

¿Cómo debe utilizar el ingeniero quimico de Fertiagro los recursos escasos para obtener la maxima utilidad posible?

Cálculos previos:

Costo por tonelada de mezcla del fertilizante X

Descripción	**Costo/Tonelada**
Costo del componente A	
5-5-10: 0.05x $2.000	$100/T
Costo del componente B	
5-5-10: 0.05x $800	$40/T
Costo del componente C	
5-5-10: 0.10x $1.600	$160/T
Costo del barro	
(0.80) x $100/T	$80/T
Costo total de los componentes	$380/T
Costo de la operación	$150/T
Costo total	$530/T

Costo por tonelada de mezcla del fertilizante Y

Descripción	**Costo/Tonelada**
Costo del componente A	
5-10-5: 0.05x $2.000	$100/T
Costo del componente B	
5-10-5: 0.10x $800	$80/T
Costo del componente C	
5-10-5: 0.05x $1.600	$80/T
Costo del barro	
(0.8) x $100	$80/T
Costo total de los componentes	$340/T
Costo de la operación	$150/T
Costo total	$490/T

Formulación del modelo:

Variables:

X_1 = número toneladas del fertilizante X

X_2 = número toneladas del fertilizante Y

Función objetivo:

Maximizar: $U = (715-530)\ X_1 + (690-490)\ X_2$

$$U = 185\ X_1 + 200\ X_2$$

Restricciones:

$0{,}05X_1 + 0{,}05X_2 \leq 1100$ Disponibilidad de componente A

$0{,}05X_1 + 0{,}10X_2 \leq 1800$ Disponibilidad de componente B

$0{,}10X_1 + 0{,}05X_2 \leq 2000$ Disponibilidad de componente C

$X_1, X_2 \geq 0$

Luego, resolvemos usando el método gráfico, debido a que solo tiene dos variables

Variación del problema anterior para el uso efectivo de solver: Si consideramos una variable más, X_3 = número toneladas del fertilizante Z. El modelo nos quedaría asi:

Maximizar: $U = 185\ X_1 + 200\ X_2 + 145\ X_3$

Restricciones:

$0{,}05X_1 + 0{,}05X_2 + 0{,}05\ X_3 \leq 1100$ Disponibilidad de componente A

$0{,}05X_1 + 0{,}10X_2 + 0{,}05\ X_3 \leq 1800$ Disponibilidad de componente B

$0{,}10X_1 + 0{,}05X_2 + 0{,}05\ X_3 \leq 2000$ Disponibilidad de componente C

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

Resolvemos usando solver:

	A	B	C	D	E	F
1						
2		VARIABLES				
3		X1	X2	X3		F. OBJETIVO
4		8000	14000	0		4280000
5		185	200	145		
6						
7		RESTRICCIONES				
8		X1	X2	X3	LADO IZQ	LADO DER
9		0,05	0,05	0,05	1100	1100
10		0,05	0,1	0,05	1800	1800
11		0,1	0,05	0,05	1500	2000
12						

Solución:

X1 = 8.000 toneladas de fertilizante X

X2 = 14.000 toneladas de fertilizante Y

X3 = 0 toneladas de fertilizante Z

Utilidad = $ 4´280.000

Informe de respuestas:

Microsoft Excel 15.0 Informe de respuestas

Celda objetivo (Máx)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$F$4	F. OBJETIVO	0	4280000

Celdas de variables

Celda	Nombre	Valor original	Valor final	Enterc
$B$4	X1	0	8000	Continuar
$C$4	X2	0	14000	Continuar
$D$4	X3	0	0	Continuar

Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	Fórmula	Estado	Demora
$E$10	LADO IZQ	1800	$E$10<=$F$10	Vinculante	0
$E$11	LADO IZQ	1500	$E$11<=$F$11	No vinculante	500
$E$9	LADO IZQ	1100	$E$9<=$F$9	Vinculante	0

Este informe de respuestas:

Además de indicarnos los valores anteriores.

Nos indica que no hay sobrantes en los recursos 1 y 2(estado obligatorio o no vinculante), pero existe un sobrante de 500 toneladas del componente C.

Informe de sensibilidad:

Microsoft Excel 15.0 Informe de confidencialidad

Celdas de variables

Celda	Nombre	Final Valor	Reducido Coste	Objetivo Coeficiente	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
$B$4	X1	8000	0	185	15	40
$C$4	X2	14000	0	200	170	15
$D$4	X3	0	-40	145	40	1E+30

Restricciones

Celda	Nombre	Final Valor	Sombra Precio	Restricción Lado derecho	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
$E$10	LADO IZQ	1800	300	1800	400	500
$E$11	LADO IZQ	1500	0	2000	1E+30	500
$E$9	LADO IZQ	1100	3400	1100	166,6666667	200

Con los resultados que aparecen en el informe anterior se puede concluir:

Los costos de la variable X_1 en 15 por encima y 40 por debajo de 185 para que la solución óptima inicial siga siendo óptima. Es decir de 145 a 200.

Los costos de la variable X_2 en 170 por encima y 15 por debajo de 200 para que la solución óptima inicial siga siendo óptima. Es decir de 185 a 370.

En el caso de X_3 por no estar en la base el rango son todos los valores ≤ 40.

Con respecto a las variaciones del lado derecho, los rangos estimados son:

Para el recurso 1: 200 para el límite inferior y 166,67 para el límite superior. Es decir, de 900 a 1266,67.

Para el recurso 2: entre 500 por debajo y 400 por encima. Es decir, de 1300 a 2200.

Y para el recurso 3 sobran 500 unidades.

El precio dual, valor marginal o precio sombra es el cambio incremental de los beneficios por cambio unitario en el término independiente de una restricción. Para el recurso 1 el precio sombra es 3400, en el caso del recurso 2 el precio sombra es 300. Para el recurso 3 es cero, de hecho para cualquier restricción no efectiva ($\geq$) el precio sombra es cero.

Ejemplo: Maximización de producción de carne de novillo y vaquilla.

Un establecimiento agropecuario se dedica al engorde de novillos y vaquillonas. Para ello cuenta con dos corrales cuya capacidad máxima es de 300 animales cada uno. Cada novillo debe permanecer 100 días en el corral y se calcula que ganan un kilogramo de peso por día.

El novillo consume por día 300 gramos de maíz, 100 gramos de afrechillo, 500 gramos de sorgo por día. El costo de su dieta diaria es de $0.5 y el precio de venta de Kg de carne de novillo $1.

A su vez la vaquillona consume por día 200 gramos de maíz, 50 gramos de afrechillo, 250 gramos de sorgo por día. El costo de la

dieta diaria es de $0.40 y el precio de venta del Kg de carne de vaquillona es de $0.70.

El establecimiento tiene disponible 11 toneladas de maíz, 5 toneladas de afrechillo, 15 toneladas de sorgo.

El dueño del establecimiento desea saber la cantidad óptima de novillos y vaquillonas a ser engordados en los corrales a los efectos de maximizar la ganancia del establecimiento agropecuario. Determine el modelo y resuelva mediante solver. Además del análisis del informe de resultados conteste las siguientes preguntas:

Una empresa se ofrece a hacerle un nuevo corral por apenas $500, ¿Es conveniente hacer el corral? ¿Por qué?

¿Cuánto estaría dispuesto a pagar al dueño del establecimiento por un kilogramo de maíz? ¿Hasta cuantas toneladas estaría dispuesto a comprar a ese precio?

¿Cuánto estaría dispuesto a pagar por 5 toneladas de sorgo?

Suponiendo que el costo de la alimentación del ganado se mantiene estable, ¿por debajo de qué precio debería estar el Kg de carne de novillo para que la solución óptima identificada deje de serlo?

Primero determinamos el Modelo de P.L:

Declaración de variables:

X_1 = número de novillos

X_2 = número de vaquillas

Función objetivo:

Maximizar la Ganancia $G = (1.00 – 0.50)\ X_1 + (0.70 – 0.40)\ X_2$

$G = 0.50\ X_1 + 0.30\ X_2$

$G = 50\ X_1 + 30\ X_2$, expresando en centavos de dólar

Restricciones:

$30\ X_1 + 20\ X_2 \leq 11000$

$10\ X_1 + \ \ 5\ X_2 \leq 5000$

$50\ X_1 + 25\ X_2 \leq 15000$

$X_1 + \qquad X_2 \leq 600$

$X_1, X_2 \geq 0$

Una vez obtenido el modelo procedemos a resolverlo, mediante el complemento Solver de Excel:

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor Igual	Costo Reducido	Coeficiente Objetivo	Aumento permisible	Disminución Permisible
$C$4	Novillos	100	0	50	10	5
$D$4	Vacas	400	0	30	3,333333333	5

Restricciones

Celda	Nombre	Valor Igual	Precio Sombra	Restricción Lado derecho	Aumento permisible	Disminución Permisible
$E$5	Maíz	11000	1	11000	1000	2000
$E$6	Afrechillo	3000	0	5000	1E+30	2000
$E$7	Sorgo	15000	0,4	15000	3333,333333	1250
$E$8	Corrales	500	0	600	1E+30	100

Solución:

X_1 = número de novillos = 100

X_2 = número de vaquillas = 400

Del análisis de los resultados, podemos dar respuesta a las interrogantes planteadas:

Una empresa se ofrece a hacerle un nuevo corral por apenas $500, ¿Es conveniente hacer el corral? ¿Por qué?

No es conveniente hacer el nuevo corral ya que el precio sombra del recurso es igual a cero, y la cantidad de corrales planteados está dentro del rango de factibilidad.

¿Cuánto estaría dispuesto a pagar al dueño del establecimiento por un kilogramo de maíz? ¿Hasta cuantas toneladas estaría dispuesto a comprar a ese precio?

Esta dispuesto a pagar hasta $1.00 por un Kg de maíz y a ese precio está dispuesto a comprar una tonelada de acuerdo al rango de factibilidad.

¿Cuánto estaría dispuesto a pagar por 5 toneladas de sorgo?

Cinco toneladas equivalen a 5000 Kg en el modelo, este valor esta fuera del rango de factibilidad, por lo tanto, no podemos utilizar el precio sombra para saber hasta cuanto estaríamos dispuesto a pagar por esa cantidad de sorgo. Hay que reoptimizar.

Suponiendo que el costo de la alimentación del ganado se mantiene estable, ¿por debajo de qué precio debería estar el Kg de carne de novillo para que la solución óptima identificada deje de serlo?

El precio del Kg de carne de novillo debe ser menor a 95 centavos de dólar. De esta forma el C_1 (coeficiente del primer término de la función objetivo) estaría fuera del rango de optimalidad.

Análisis de Sensibilidad

El análisis de sensibilidad busca determinar los efectos que se producen en la solución óptima al realizar cambios en cualquiera de los parámetros del modelo de programación lineal planteado inicialmente. Entre los cambios que se investigan están: los cambios en los coeficientes de las variables en la función objetivo tanto para variables básicas como para las variables no básicas, cambios en los recursos disponibles de las restricciones, variación de los coeficientes de utilización en las restricciones e introducción de una nueva restricción.

El objetivo principal del análisis de sensibilidad es identificar el intervalo permisible de variación en los cuales las variables o parámetros pueden fluctuar sin que cambie la solución óptima. Sin embargo, así mismo se identifica aquellos parámetros sensibles, es decir, los parámetros cuyos valores no pueden cambiar sin que cambie la solución óptima. Los investigadores de operaciones tienden a prestar bastante atención a aquellos parámetros con holguras reducidas en cuanto a los cambios que pueden presentar, de forma que se vigile su comportamiento para realizar los ajustes adecuados según corresponda y evitar que estas fluctuaciones pueden desembocar en una solución no factible.

A modo general, cuando se realiza un análisis de sensibilidad a una solución óptima se debe verificar cada parámetro de forma individual, dígase los coeficientes de la función objetivo y los límites de cada una de las restricciones.

Prueba de factibilidad: se prueba la factibilidad de esta solución mediante la verificación de que todas las variables básicas de la columna del lado derecho aun tengan valores no negativos.

Prueba de optimalidad: se verifica si esta solución es óptima y factible, mediante la comprobación de que todos los coeficientes de las variables no básicas de la región Z permanecen no negativos.

Prueba de optimalidad: se verifica si esta solución es óptima y factible, mediante la comprobación de que todos los coeficientes de las variables no básicas del reglón Z permanecen no negativos.

UNIDAD V. OTROS PROYECTOS DE APLICACIÓN AGROPECUARIOS

Suplemento alimenticio

Problema

Se desea elaborar una dieta mínima que consiste en la combinación de 5 plantas con los cuales se obtenga un suplemento alimenticio, estos productos a utilizarse son: Moringa Oleífera, Amaranto, Quinua, Soja y Naranja.

Sabemos que por cada 100g de Quinua (sin cocinar) se proporciona 47 mg de calcio, 4.6 mg de hierro. 197 mg de magnesio, 457 mg de fosforo, 563 mg de potasio, 3.1 mg de zinc, 14000 mg de proteína, y 10 mg de vitamina A.

Por cada 100g de Amaranto (Hojas crudas) se proporcionan 215 mg de calcio, 2.32 mg de hierro, 55 mg de magnesio, 50 mg de fosforo, 611 mg de potasio, 0.90 mg de zinc, 14000 mg de proteína, 43.3 mg vitamina C y 0.146 mg de vitamina A.

Por cada 100g de Moringa Oleifera (hojas) se proporciona 440 mg de calcio, 7 mg de hierro, 52 mg de magnesio, 70 mg de fosforo, 259 mg de potasio, 1 mg de zinc, 6700 mg de proteína, 220 mg de vitamina C, y 3.39 mg vitamina A

Por cada 100g de Semilla de Soja proporciona 277 mg de calcio, 8 mg de hierro, 240 mg de magnesio, 580 mg de fosforo, 1700 mg de potasio, 3 mg de zinc, 35000 mg de proteína y 6.6 mg de vitamina A.

Por cada 100 g de Naranja en jugo, se proporciona 40 mg de calcio, 0.10 mg de hierro, 181 mg de potasio, 940 mg de proteína, 53.2 mg de vitamina C y 0.011000 mg de vitamina A.

Por cada 100g de Quinua es de $0.25; Amaranto $0.30; Moringa Oleífera $0. 15, Semilla de Soja $0.15, y Naranja $0.50; determinar la cantidad adecuada para la elaboración del suplemento alimenticio x1, x2, x3, x4 y x5 que debe ser mezclado para cumplirlos requerimientos que suplan las necesidades alimenticias del organismo infectado por una afección como lo es en el caso del SIDA y tratar de minimizar los costos para la elaboración del producto.

Diseño de modelo

Declaración de variables:

X_1= Número de g. de Quinua

X_2= Número de g. de Amaranto

X_3= Número de g. de Moringa Oleifera

X_4= Número de g. de Semilla de Soja

X_5= Numero de g. de Naranja

Función objetivo:

Costo = $0.0025\ X_1 + 0.0030\ X_2 + 0.0015\ X_3 + 0.0015\ X_4 + 0.0050 X_5$

Restricciones:

Calcio: $47X_1 + 215X_2 + 440X_3 + 277X_4 + X_5 \geq 1000$

Hierro: $4.6\ X_1 + 2.32X_2 + 7X_3 + 8X_4 + X_5 \geq 8$

Magnesio: $197X_1 + 55X_2 + 52X_3 + 240X_4 + X_5 \geq 360$

Fósforo: $457X_1 + 50X_2 + 70X_3 + 580X_4 + X_5 \geq 800$

Potasio: $563X_1 + 611\ X_2 + 259X_3 + 1700X_4 + X_5 \geq 1500$

Zinc: $3.1X_1 + 0.90X_2 + 1X_3 + 3X_4 + X_5 \geq 8$

Proteína: $14000X_1 + 14000X_2 + 6700X_3 + 35000X_4 + X_5 \geq 46$

Vitamina C: $0X_1 + 43.3X_2 + 220X_3 + 0X_4 + X_5 \geq 75$

Vitamina A: $10X_1 + 0.146X_2 + 3.39X_3 + 6.6X_4 + X_5 \geq 0.7$

Límite máximo: 10% de Quinua, 25% de Amaranto, 25% de Moringa, 20% de Soja y 20% de Naranja

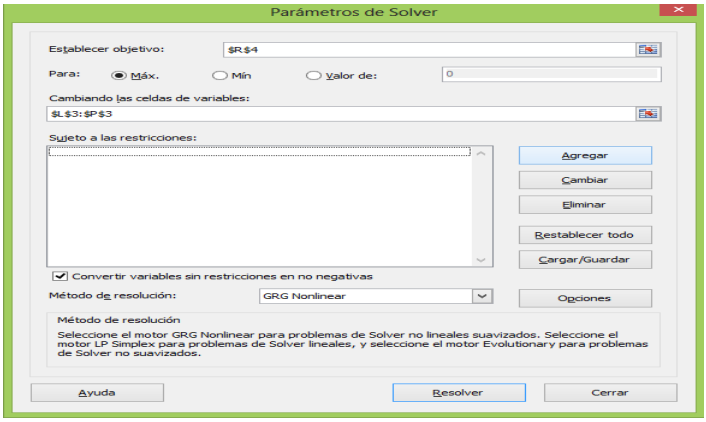
Suma Total: $X_1 + X_2 + X_3 + CX_4 + CX_5 = 100g$

Aplicación del Solver:

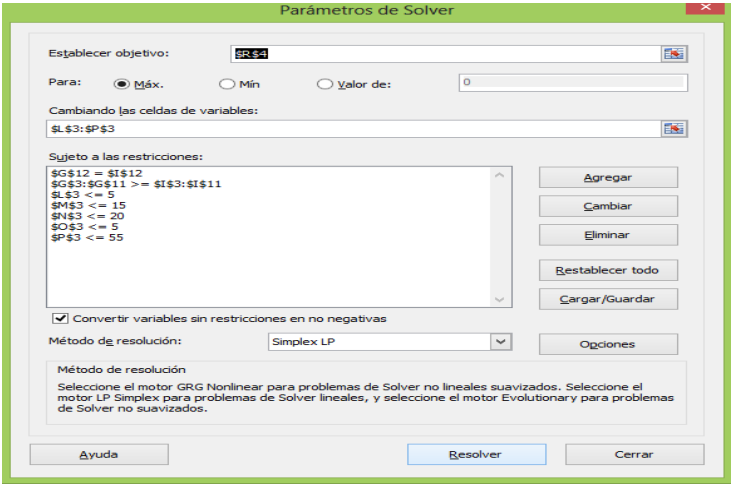
Una vez incluidas todas las fórmulas, tanto la de la función objetivo como las restricciones, se procede a ejecutar el Solver (en el menú Herramientas- Solver). Aparecerá la siguiente pantalla, donde comenzaremos por seleccionar la celda donde se encuentra la función objetivo, el tipo de problema (maximización o minimización) y las celdas que representan las variables del modelo.

	QUINUA (SIN COCINAR)	AMARANTO (HOJAS CRUDAS)	MORINGA OL. (HOJAS)	SEMILLA DE SOJA	NARANJA (JUGO)	APORTES DE LA MEZCLA	REQUERIMIENTOS NUTRICIONALES	
PORCIONES	100 g	100 g	100 g	100 g	100g			
CALCIO	47	215	440	277	40	0	≥	1000
HIERRO	4.6	2.32	7	8	0.1	0	≥	8
MAGNESIO	197	55	52	240	0	0	≥	360
FÓSFORO	457	50	70	580	0	0	≥	800
POTASIO	563	611	259	1700	181	0	≥	1500
ZINC	3.1	0.9	1	3	0	0	≥	8
PROTEÍNA	14000	14000	6700	35000	940	0	≥	46
VITAMINA C	0	43.3	220	0	53.2	0	≥	75
VITAMINA A	10	0.146	3.39	6.6	0.011	0	≥	0.7
CANTIDAD	1	1	1	1	1	0	=	100
COSTO	0.25	0.3	0.15	0.15	0.5	0	MÍNIMO	
LIMITE MÁXIMO	5	15	20	5	55			

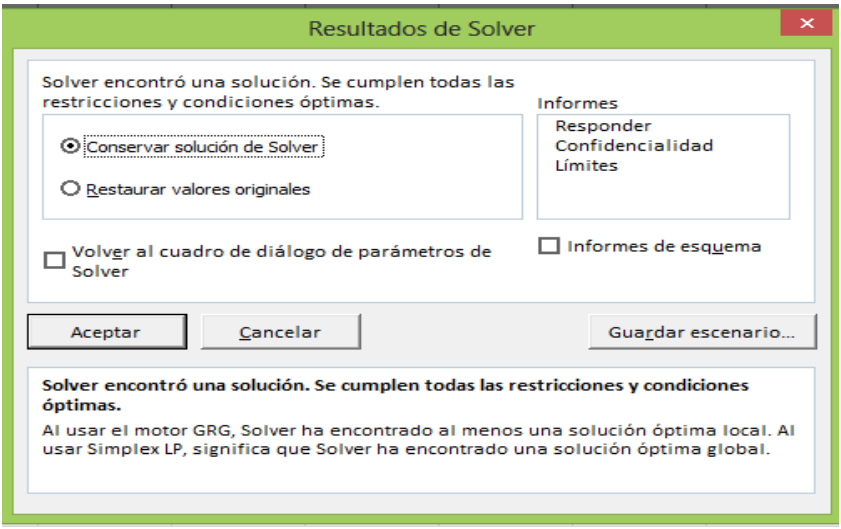
Se introducen las restricciones correspondientes mediante el botón "Agregar" de la pantalla de Parámetros de Solver



Nos dirigimos a opciones, y señalamos adoptar no negativos, debido a que nuestras formula debe de tener datos positivos al momento de la mezcla, posterior a eso damos clic en Resolver.



Luego seleccionamos la opción “Conservar solución Solver”, y aceptamos todos los términos.



Y por último revisamos los resultados finales que aparecerán en las celdas de las variables.

	QUINUA (SIN COCINAR)	AMARANTO (HOJAS CRUDAS)	MORINGA OL. (HOJAS)	SEMILLA DE SOJA	NARANJA (JUGO)	APORTES DE LA MEZCLA	REQUERIMIENTOS NUTRICIONALES	
PORCIONES	100 g	100 g	100 g	100 g	100g			
CALCIO	47	215	440	277	40	15845	≥	1000
HIERRO	4.6	2.32	7	8	0.1	243.3	≥	8
MAGNESIO	197	55	52	240	0	4050	≥	360
FÓSFORO	457	50	70	580	0	7335	≥	800
POTASIO	563	611	259	1700	181	35615	≥	1500
ZINC	3.1	0.9	1	3	0	64	≥	8
PROTEÍNA	14000	14000	6700	35000	940	640700	≥	46
VITAMINA C	0	43.3	220	0	53.2	7975.5	≥	75
VITAMINA A	10	0.146	3.39	6.6	0.011	153.595	≥	0.7
CANTIDAD	1	1	1	1	1	100	=	100
COSTO	0.25	0.3	0.15	0.15	0.5	37	MÍNIMO	
LIMITE MÁXIMO	5	15	20	5	55			

VARIABLES						
x1	x2	x3	x4	x5		
5	15	20	5	55		FUNCION OBJETIVO
0.0025	0.003	0.0015	0.0015	0.005		0.37

Resultados:

Porcentajes en la combinación de plantas junto a sus micronutrientes y macronutrientes de la dieta balanceada

Para obtener una mezcla optima, que supla la demanda de micronutrientes y macronutrientes que el organismo necesita requiere a un mínimo costo se debe combinar las siguientes plantas en dichos valores:

Amaranto: 5

Quinua: 15

Moringa Oleifera: 20

Soja: 5

Naranja: 55

El costo mínimo de los 100g es de $ 0.37

Balanceado para pollos

Problema.

Se desea elaborar una dieta mínima que consiste en la combinación de 9 productos con los cuales se obtenga un balanceado estos productos a utilizarse son: Maíz Nacional, Soya 47, Polvillo de Arroz, Polvillo de Trigo, Aceite de Palma, Fosfato Bicalcico, Carbonato de Calcio, Metionina y Sal.

Sabemos que por cada kg. de Maíz Nacional se proporciona 3319 de Energía Metabolizable; 7,95 de Proteína Cruda; 0,01 de Calcio; 0,09 de Fosforo; 0,02 de Sodio; 0,05 de Cloro; 0,23 de Lisina; 0,17 de Metionina; 0,35 de Metionina + Cistina; 0,29 de Treonina y 0,06 de Triptófano.

Por cada kg. de Soya 47 proporciona: 2500 de Energía Metabolizable; 46 de Proteína Cruda; 0,2 de Calcio; 0,2 de Fosforo; 0,03 de Sodio; 0,05de Cloro; 2,95 de Lisina; 0,65 de Metionina; 1,3 de Metionina + Cistina;1,82 de Treonina y 0,62 de Triptófano.

Por cada kg. de Polvillo de Arroz proporciona: 3140 de Energía Metabolizable; 10,19 de Proteína Cruda; 0,06 de Calcio; 0,19 de Fosforo; 0,11 de Sodio; 0,11 de Cloro; 0,48 de Lisina; 0,21 de Metionina;0,44 de Metionina + Cistina; 0,4 de Treonina y 0,11 de Triptófano.

Por cada kg. de Polvillo de Trigo proporciona: 1460 de Energía Metabolizable; 14,5 de Proteína Cruda; 0,14 de Calcio; 0,6 de Fosforo; 0,04 de Sodio; 0,07 de Cloro; 0,61 de Lisina; 0,23 de Metionina; 0,55 de Metionina + Cistina; 0,5 de Treonina y 0,23 de Triptófano.

Por cada kg. de Aceite de Palma proporciona: 8345 de Energía Metabolizable.

Por cada kg. de Fosfato Bicalcico proporciona: 24 de Calcio y 18 de Fosforo.

Por cada kg. de Carbonato de Calcio proporciona: 36 de Calcio y 0,02 de Sodio.

Por cada kg. de Metionina proporciona: 58,7 de Proteína Cruda; 0,02 de Calcio; 99 de Metionina y 99 de Metionina + Cistina.

Por cada kg. de Sal proporciona: 35,4 de Sodio y 54,5 de Cloro 16

Por cada kg. de Maíz Nacional es de $0,39; Soya 47 $0,54, Polvillo de Arroz $0,29; Polvillo de Trigo $0,25; Aceite de Palma $1,2; Fosfato Bicalcico $1,82; Carbonato de Calcio $0,06; Metionina $5,8 y Sal $0,18; determinar la cantidad de alimento X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8 y X_9 que debe ser mezclado para cumplir los requerimientos de las gallinas y minimizar el costo de la ración.

Modelación de la dieta balanceada con Solver

Abrimos una hoja de Excel para introducir los datos del problema, dejando en blanco las celdas correspondientes a los resultados (las variables y la función objetivo), además de escribir las restricciones para analizar si se cumple que sea una solución factible

7	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1		Maíz Nacional (X1)	Soya 47 (X2)	Polvillo de Arroz (X3)	Polvillo de Trigo (X4)	Aceite de Palma	Fosfato Bicalcico (X6)	Carbonato de Calcio (X7)	Methionine (X8)	Sal (X9)	Aportes de la Mezcla	Requerimientos Nutricionales		DIFERENCIA
2	Energía Metabolizable (Kcal/Kg)	3319	2500	3140	1460	8345	0	0	0	0		>=	2800	
3	Proteína Cruda %	7,95	46	10,19	14,5	0	0	0	0	0		>=	18	
4	Calcio %	0,01	0,2	0,06	0,14	0	24	36	0	0		=	4	
5	Fósforo %	0,09	0,2	0,19	0,6	0	18	0	0	0		=	0,38	
6	Sodio %	0,02	0,03	0,11	0,04	0	0	0,02	0	35,4		=	0,15	
7	Cloro %	0,05	0,05	0,11	0,07	0	0	0	0	54,5		>=	0,15	
8	Lisina %	0,23	2,95	0,48	0,61	0	0	0	0	0		>=	0,8	
9	Metionina %	0,17	0,65	0,21	0,23	0	0	0	99	0		>=	0,41	
10	Metionina + Cistina %	0,35	1,3	0,44	0,55	0	0	0	99	0		>=	0,74	
11	Triptófano %	0,06	0,62	0,11	0,23	0	0	0	0	0		>=	0,2	
12	Treonina %	0,29	1,82	0,4	0,5	0	0	0	0	0		>=	0,59	
13	COSTO	0,39	0,54	0,29	0,25	1,2	1,82	0,06	5,8	0,18		MÍNIMO		
14	Cantidad										0,00			
15	Límite MAXIMO	60	40	8	8	3	3	10	100	100				

Declaración de variables

X_1 = Número de kg. De Maíz Nacional.

X_2 = Número de kg. De Soya 47.

X_3 = Número de kg. De Polvillo de Arroz.

X_4 = Número de kg. De Polvillo de Trigo.

X_5 = Numero de kg. De Aceite de Palma.

X_6 = Número de kg. De Fosfato Bicalcico.

X_7 = Número de kg. De Carbonato de Calcio.

X_8 = Número de kg. De Metionina.

X_9 = Número de kg. De Sal.

Función objetivo

$C = 0{,}39X_1 + 0{,}54X_2 + 0{,}29X_3 + 0{,}25X_4 + 1{,}2X_5 + 1{,}82X_6 + 0{,}06X_7 + 5{,}8X_8 + 0{,}18X_9$

Restricciones

Cantidad de Alimento a Producir: X1 + X2 + X3 + X4 + X5 + X6 + X7 + X8 + X9 = 100%**Energía Metabolizable:** 3319X1 + 2500X2 + 3140X3 + 1460X4 + 8345X5 >= 2800 (Kcal/kg)

Proteína Cruda: 7,95X1 + 46X2 + 10,19X3 + 14,5X4 + 58,7X8 >= 17,8%

Calcio: 0,01X1 + 0,2X2 + 0,06X3 + 0,14X4 + 24X6 + 36X7 + 0,02X8 = 3,75 %

Fósforo: 0,09X1 + 0,2X2 + 0,19X3 + 0,6X4 + 18X6 = 0.38%

Sodio: 0,02X1 + 0,03X2 + 0,11X3 + 0,04X4 + 0,02X7 + 35,4X9 = 0.15%

Cloro: 0,05X1 + 0,05X2 + 0,11X3 + 0,07X4 + 54,5X9 >= 0.15 (pero que sea lo menor posible) %

Lisina: 0,23X1 + 2,95X2 + 0,48X3 + 0,61X4 >= 0.8%

Mitionina: 0,17X1 + 0,65X2 + 0,21X3 + 0,23X4 + 99X8 >= 0.41%

Metionina + Cistina: 0,35X1 + 1,3X2 + 0,44X3 + 0,55X4 + 99X8 >= 0.74 (%)

Treonina: 0,29X1 + 1,82X2 + 0,4X3 + 0,5X4 >= 0.59%

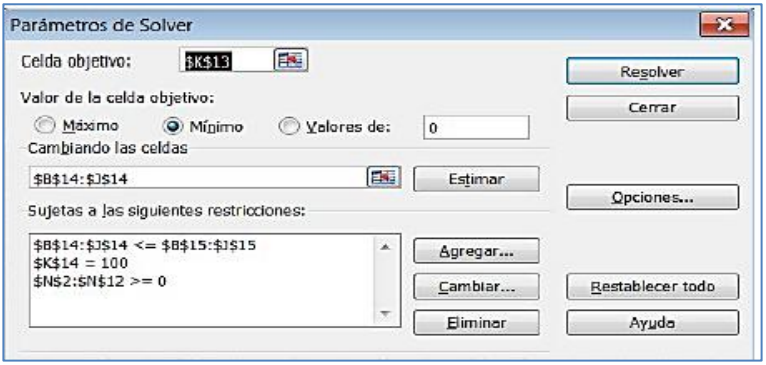
Triptófano: 0.06X1 + 0,62X2 + 0,11X3 + 0,23X4 + >= 0.2%

Límite máximo: 60% Maíz Nacional, 40% Soya, 8% Polvillo de arroz,8% polvillo de trigo, 3% aceite de palma, 3% fosfato Bicalcico, 10%carbonato de calcio, 100% metionina, 100% sal.

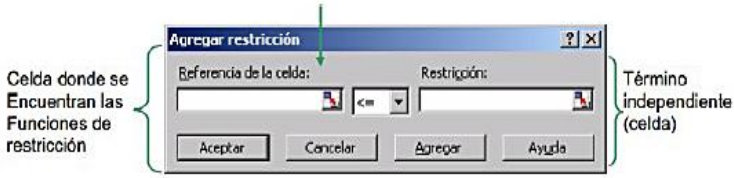
Suma Total: CX1 + CX2 + CX3 + CX4 + CX5 + CX6 + CX7 + CX8 + CX9 = 100 (%)

Aplicación en el Solver

Una vez incluidas todas las fórmulas, tanto la de la función objetivo como las restricciones, se procede a ejecutar el Solver (en el menú Herramientas- Solver). Aparecerá la siguiente pantalla, donde comenzaremos por seleccionar la celda donde se encuentra la función objetivo, el tipo de problema (maximización o minimización) y las celdas que representan las variables delModelo.



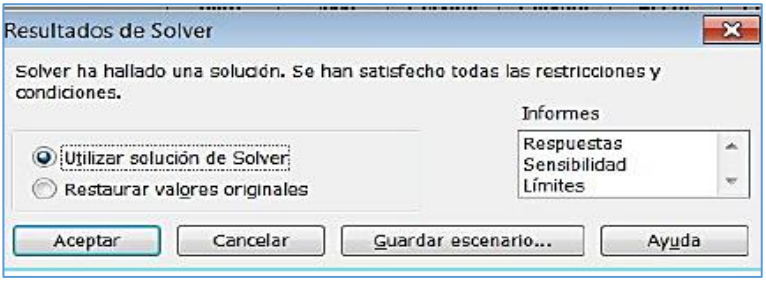
Se introducen las restricciones correspondientes mediante el botón "Agregar"de la pantalla de Parámetros de Solver



Nos dirigimos a opciones, y señalamos adoptar no negativos, debido a que nuestra formula debe de tener datos positivos al momento de la mezcla

En la misma se detalla el tipo de resolución a realizar, las restricciones de no negatividad de las variables del modelo y otras opciones, no debemos olvidar seleccionar la restricción de no negatividad en “Asumir no negativos”. Una vez introducidas todas las opciones correspondientes se debe oprimir el botón “Aceptar”, mostrándose nuevamente la ventana inicial

Finalmente presionar el botón “Resolver” de la ventana principal



La figura descrita indica que el Solver ha encontrado una respuesta al modelo y aparecerán los resultados en las celdas correspondientes a las fórmulas introducidas en un principio. En nuestro problema deben aparecer los resultados calculados en las celdas correspondientes a las variables y en la celda de la función objetivo. También permite ver 3 tipos de informes, pero se deben seleccionar antes de presionar el botón "Aceptar", lo cual agregará diferentes hojas en el libro de Excel con los respectivos resultados.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1		Maíz Nacional (X1)	Soya 47 (X2)	Polvillo de Arroz (X3)	Polvillo de Trigo (X4)	Aceite de Palma (X5)	Fosfato Bicalcico (X6)	Carbonato de Calcio (X7)	Methionine (X8)	Sal (X9)	Aportes de la Mezcla	Requerimientos Nutricionales		DIFERENCIA
2	Energía Metabolizable (Kcal/Kg)	3319	2500	3140	1460	8845	0	0	0	0	2800,00	>=	2800	0,00
3	Proteína Cruda %	7,95	46	10,19	14,5	0	0	0	0	0	18,00	>=	18	0,00
4	Calcio %	0,01	0,2	0,06	0,14	0	24	36	0	0	4,00	=	4	0,00
5	Fósforo %	0,09	0,2	0,19	0,6	0	18	0	0	0	0,38	=	0,38	0,00
6	Sodio %	0,02	0,03	0,11	0,04	0	0	0,02	0	35,4	0,15	=	0,15	0,00
7	Cloro %	0,05	0,05	0,11	0,07	0	0	0	0	54,5	0,23	>=	0,15	0,08
8	Lisina %	0,23	2,95	0,49	0,61	0	0	0	0	0	1,00	>=	0,8	0,20
9	Metionina %	0,17	0,65	0,21	0,23	0	0	0	99	0	0,45	>=	0,41	0,04
10	Metionina + Cistina %	0,35	1,3	0,44	0,55	0	0	0	99	0	0,74	>=	0,74	0,00
11	Triptófano %	0,06	0,62	0,11	0,23	0	0	0	0	0	0,22	>=	0,2	0,02
12	Treonina %	0,29	1,82	0,4	0,5	0	0	0	0	0	0,70	>=	0,59	0,11
13	COSTO	0,39	0,54	0,29	0,25	1,2	1,82	0,06	5,8	0,18	44,21	MINIMO		
14	Cantidad	48,58	28,95	8,00	0,00	2,54	1,46	9,95	0,16	0,34	100,00			
15	Límite MAXIMO	60	40	8	8	3	3	10	100	100				

Resultados:

Porcentajes en la combinación de productos y aminoácidos esenciales de la dieta balanceada.

Para obtener una mezcla optima, que cumpla con todos los requerimientos fisiológicos que las gallinas ponedoras requieren a un mínimo costos se debe combinar los siguientes alimentos en dichos porcentajes:

Maíz Nacional 48,58%.

Soya 28,96.

Polvillo de arroz 8%.

Aceite de Palma 2,54%.

Fosfato Bicalcico 1,46%.

Carbonato de calcio 9,95%.

Metionina 0,16%.

Sal 0,34%.

El costo mínimo de los 100kg es de $ 44,21.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Álvarez, A., & Boche, S. (1999). Modelos matemáticos para describir crecimientos doble sigmoideos en frutos de un nectarín tardío. *(cv. Sun Grand). Agro Sur, 27*(1), 21–28.

Avanza, M. M., Giménez, L., Mazza, S. M., & Rodríguez, V. A. (2004). Descripción del crecimiento de frutos de naranjo dulce mediante el uso de modelos no lineales. *Comunicaciones Científicas y Tecnológicas*, Universidad Nacional del Nordeste.

Calvo, H. R., González, A. J., & Pérez, B. S. (1994). *Manual de modelos no lineales en los ámbitos agronómico, ganadero y forestal.* Ministerio de Agricultura, Pesca y Alimentación, Instituto Nacional de Investigación y Tecnología Agraria y Alimentaria.

Castro-Brindis, R., Galvis-Spindola, A., Sánchez-García, P., Peña-Lomelí, A., Sandoval-Villa, M., & Alcantar-González, G. (2004). Demanda de nitrógeno en tomate de cáscara. *(Physalis ixocarpa, Brot.). Revista Chapingo Serie Horticultura*, 147–152.

Chávez, D. (2021). Importancia de la enseñanza de las matemáticas en las carreras agropecuarias. *Revista Ciencias Técnicas Agropecuarias, 12*(1), 78–81.

Cunha, R. L., Silva, B., & Avegliano, P. B. (2023). A Comprehensive Modeling Approach for Crop Yield Forecasts using AI-based Methods and Crop Simulation Models. *arXiv preprint arXiv:2306.10121*.

Espinoza-Espinoza, J. R., Ortiz-Cereceres, J., Mendoza-Castillo, M. d., Villaseñor-Alva, J. A., Villegas-Monter, A., Peña-

Valdivia, C., & Almaguer-Vargas, G. (2022). Modelos de regresión para la estimación del peso fresco y seco de ramas de duraznero. *(Prunus persica, L. Batsh.). Revista Chapingo Serie Horticultura*, *4*(2), 125–131.

Fink, M., Daniels, A., Qian, C., Martínez Velásquez, V., Salotra, S., & Wollherr, D. (2023). Comparison of Dynamic Tomato Growth Models for Optimal Control in Greenhouses. *arXiv preprint arXiv:2308.06031*.

González-Sánchez, A. J., & Pérez-Brito, D. (2020). Modelos matemáticos en la agricultura. *Universidad Autónoma Chapingo*.

González-Sánchez, A. J., & Pérez-Brito, D. (2022). *Modelación matemática en la agricultura.* Universidad Autónoma Chapingo. Retrieved from https://dicea.chapingo.mx/wp-content/uploads/2022/02/Modelacion-Matematica-Agricultura.pdf

Guzmán, E. C., Alcalde, B. S., Mosqueda, V. R., & Martínez, G. A. (1996). Ecuación para estimar el volumen y dinámica de crecimiento del fruto de mango. *cv. Manila. Agronomía Tropical*, *46*(4), 395–412.

Hernández Gómez, F. J., & Hernández Castillo, T. (2019). *Investigación de Operaciones: Teoría, Modelos y Problemas Aplicados.* Editorial Académica Española.

Hillier, F., & Lieberman, G. (2015). *Investigación de Operaciones.* (10ª ed.). McGraw Hill.

Jiménez, G. (2020). *Investigación de Operaciones.* Alfaomega Grupo Editor.

López-Cruz, I. L., & Mora-Aguilar, E. F. (2022). La modelación y simulación matemáticas: una herramienta para la protección de cultivos. *Revista Mexicana de Ciencias Agrícolas, 13*(6), 1129-1142.

Ortega, D. R. (2000). *Perfeccionamiento de la enseñanza de la Matemática en la carrera de Agronomía.* (Tesis de maestría). Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas, Santa Clara, Cuba.

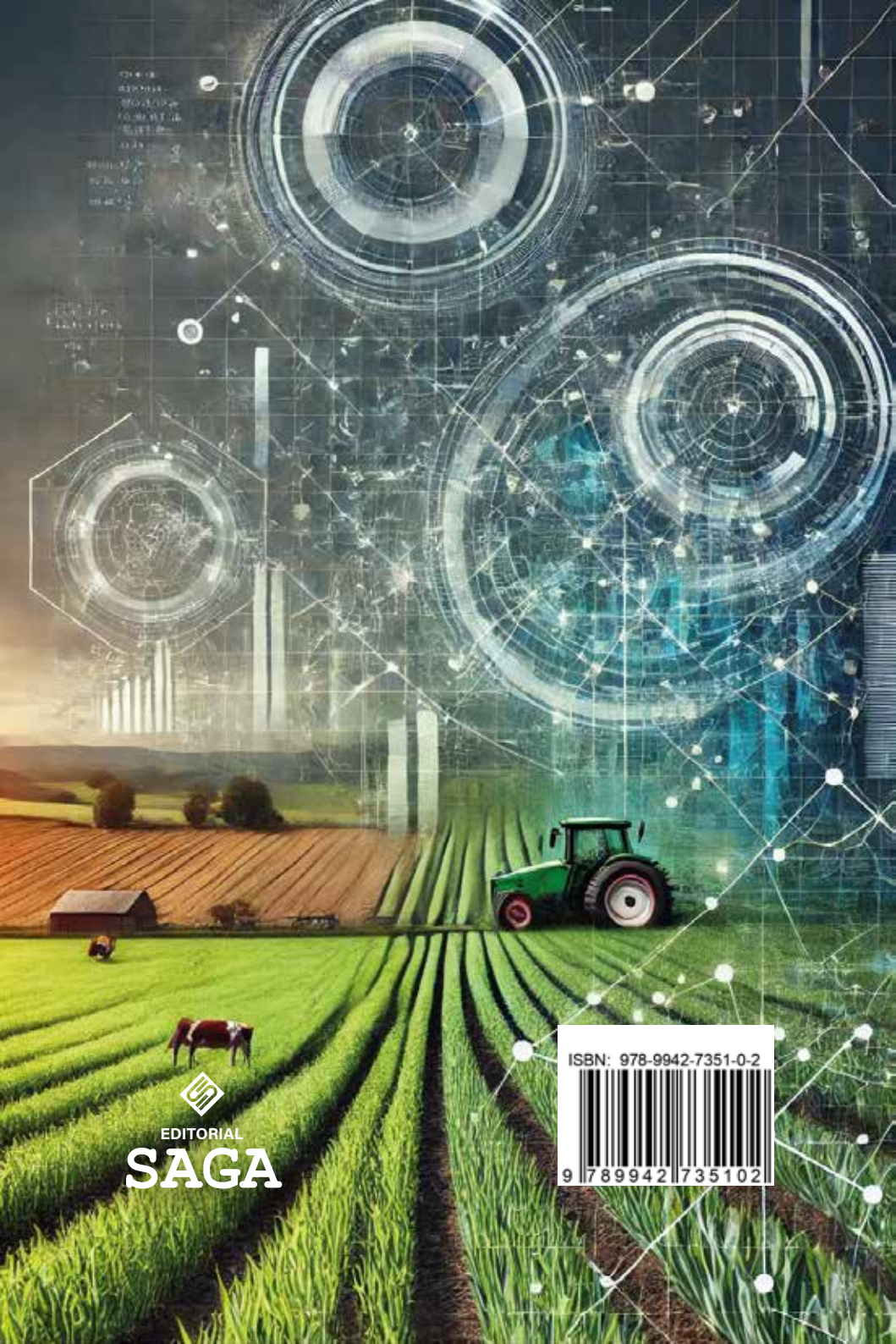
Ortega-Farías, S. O., Lozano, P., & Moreno, Y. (2002). Desarrollo de modelos predictivos de fenología y evolución de madurez en vid para vino. *cv. Cabernet Sauvignon y Chardonnay. Agricultura Técnica, 62*(1), 27–37.

Ortega-Farías, S. O., Lozano, P., & Moreno, Y. (2022). Desarrollo de modelos predictivos de fenología y evolución de madurez en vid para vino cv. Cabernet Sauvignon y Chardonnay. *Agricultura Técnica, 62*(1), 27–37.

Rodríguez, L. F., & Bermúdez, T. (1995). Usos y aplicaciones de la simulación en la investigación agropecuaria. *Agronomía Colombiana*, 198–204.

Rodríguez, L. F., & Bermúdez, T. (2020). Usos y aplicaciones de la simulación en la investigación agropecuaria. *Agronomía Colombiana, 12*(1), 198–204.

Taha, H. (1995). *Investigación de operaciones (5ª ed.).* Alfa Omega Grupo Editor, S.A.



ISBN: 978-9942-7351-0-2

9 789942 735102

EDITORIAL
SAGA